
Bewertung adaptiver Strukturen auf Basis der Strukturintensität

Vom Fachbereich Maschinenbau
an der Technischen Universität Darmstadt
zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.) genehmigte

Dissertation

von

Dipl.-Ing. Sebastian Buckert

aus Nürnberg

Berichterstatter:	Prof. Dr.-Ing. Holger Hanselka
Mitberichterstatter:	Prof. Dr.-Ing. Stephan Rinderknecht
Tag der Einreichung:	01.11.2012
Tag der mündlichen Prüfung:	29.01.2013

Darmstadt 2013

D17

Kurzfassung

Ziel der Maschinenakustik ist die Reduktion der Schallabstrahlung durch die systematische Beeinflussung des Körperschalls in technischen Strukturen. Für den gezielten Einsatz konstruktiver Maßnahmen ist es von großer Bedeutung, den Weg der Körperschallenergie in der Struktur genau zu kennen. Mittels Berechnung der Strukturintensität (STI) ist es möglich, den Fluss der Körperschallenergie, von der Erregung bis zur schallabstrahlenden Oberfläche der Struktur, zu charakterisieren und visualisieren. Durch Anwendung der STI in der Konstruktion kann der systematische Einsatz passiver und aktiver Lärm-minderungsmaßnahmen wirkungsvoll unterstützt werden. Dies ist besonders bei der Entwicklung von Leichtbaustrukturen wichtig, da so die durch Maßnahmen zur Schwingungsminderung zusätzlich eingebrachte Masse minimiert werden kann. Ziel dieser Arbeit ist es, Methoden zu entwickeln, um die Wirksamkeit dieser Maßnahmen energetisch bewerten zu können. Hierfür wurde ein Verfahren entwickelt, mit dem auch im Experiment der Betrag und die Richtung des STI-Vektors richtig bestimmt werden können. Damit ist es sowohl in der numerischen als auch in der experimentellen Simulation erstmals möglich, aus der STI die Leistung zu bestimmen, die beispielsweise ein Aktor eines aktiven Systems der Struktur zuführt. So kann geklärt werden, welcher Anteil der Schwingungsenergie im System dissipiert und welcher Anteil durch die Struktur übertragen wird und letztlich Schallabstrahlung hervorruft.

Da es eine Vielzahl unterschiedlicher Verfahren zur Berechnung der STI gibt, wurde zuerst ein Verfahren identifiziert, das für die geplanten Untersuchungen optimal geeignet ist. Dafür wurden mittels einer Monte-Carlo-Simulation die Fehler der numerischen Verfahren in Bezug auf die analytische Lösung der STI in Abhängigkeit von der Diskretisierung und der Frequenz untersucht. Um den STI-Verlauf in numerischen Simulationen richtig zu berechnen, muss die Dissipation im System sehr genau modelliert werden. Da dies für komplexe Strukturen wie z. B. einen Kofferraumunterboden eines Pkw nur schwer möglich ist, ist es wichtig, als Referenz die STI aus Messdaten korrekt bestimmen zu können. In experimentellen Untersuchungen zeigt sich jedoch, dass kleinste Fehler in der Phase der aufgezeichneten Daten zu großen Abweichungen in Betrag und Richtung des STI-Vektors führen. Die Fehler in der STI treten dabei maßgeblich bei tiefen Frequenzen auf. Eine wesentliche Verbesserung der Ergebnisse konnte durch eine örtliche Mittelung der Messdaten erreicht werden. Aufbauend auf diesen Ergebnissen kann in der numerischen und experimentellen Simulation mit geschlossenen Integralen um Quellen und Senken aus der STI die Leistung berechnet werden, die der Struktur zugeführt oder entzogen wird. Die wesentlichen Einflussfaktoren auf die Leistungsberechnung wurden identifiziert und in anschließenden Parameterstudien numerisch und experimentell weiter untersucht. Somit lässt sich ein optimaler Abstand der Integralgrenze von der Quelle bestimmen, für den der Fehler der Leistungsberechnung minimal wird. Abschließend werden die auf der STI basierenden Auswertemethoden in der Auslegung eines aktiven Systems eingesetzt. Da das entwickelte Regelsystem den Betrag der STI als Regelgröße verwendet, ist mit dem aktiven System ein direkter Eingriff in den Energiefluss der Struktur möglich. Im Vergleich zu einem Regelsystem mit Beschleunigung als Regelgröße ermöglicht die STI-Regelung eine effektivere Reduktion der Schwingungsamplituden.

Die durchgeführten Untersuchungen schaffen die Voraussetzung, die zugeführten und dissipierten Leistungen in aktiven und passiven Systemen quantitativ bestimmen zu können und ermöglichen damit die systematische Bewertung der Wirksamkeit der eingesetzten Maßnahmen zur Schwingungsminderung.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	III
Tabellenverzeichnis	VII
Verwendete Formelzeichen	VIII
1 Einleitung	1
1.1 Stand der Forschung	2
1.2 Ziele der Arbeit	7
2 Analytisches Plattenmodell mit piezoelektrischem Plattenaktor	10
2.1 Grundlegende Berechnungsgleichungen einer Platte	10
2.2 Beschreibung der Randbedingungen durch gemischte Eigenformen	13
2.3 Modellierung eines piezoelektrischen Plattenaktors	15
3 Mathematische Beschreibung der Strukturintensität (STI)	21
3.1 Energiebilanz für ein Kontrollvolumen	21
3.2 Berechnung der Strukturintensität aus Verschiebungsgrößen	22
3.3 Einfluss von Dissipation und Dämpfung auf den Energiefluss	26
3.4 Verbindung zwischen Leistungsfluss und kinetischer und potentieller Energie	28
3.5 Entstehung von Wirbeln im Leistungsfluss	30
3.6 Berechnung der STI im Zeitbereich	32
4 Auswahl eines Verfahrens zur Berechnung der STI	33
4.1 Untersuchung der Fehler der STI-Berechnungsverfahren	33
4.1.1 Analytische Berechnung der STI	34
4.1.2 Das 8-Aufnehmerverfahren	35
4.1.3 Das 2-Aufnehmerverfahren	37
4.1.4 Intensitätsberechnung mittels 2-D-Fouriertransformation	39
4.1.5 Das Gradientenverfahren	42
4.1.6 Das CDS-Verfahren	43
4.2 Direkter Vergleich und Auswahl des Berechnungsverfahrens	46
5 Verbesserung der STI-Berechnung aus Messdaten	49
5.1 Auswirkung von Messfehlern auf die Berechnung der STI	49
5.2 Verbesserung der STI-Berechnung durch die Anwendung eines Mittelungsverfahrens . . .	52
5.2.1 Kriterien zur Bewertung der STI-Berechnung aus gemittelten Verschiebungsdaten .	53
5.2.2 Bestimmung des Fehlers der STI-Berechnung mit Mittelungsverfahren	55

5.2.3	Anwendung des Mittelungsverfahrens bei variierender Standardabweichung des Messfehlers	58
5.3	Verallgemeinerung der Ergebnisse für Rechteckplatten verschiedener Geometrien	61
6	Berechnung der Leistung aus der Strukturintensität	65
6.1	Numerische Berechnung des STI-Integrals	65
6.2	Analytische Berechnung der zugeführten Leistung	66
6.3	Bestimmung maßgebender Einflussfaktoren auf die Leistungsberechnung	68
6.3.1	Sensitivitätsanalyse am analytischen Plattenmodell	68
6.3.2	Untersuchung der Konvergenz der betrachteten Parameter	70
6.3.3	Einfluss der Frequenz auf die Berechnung der Effektgrößen	72
6.4	Einfluss des Integralabstandes, der Diskretisierung und der Frequenz auf die Leistungsbe- rechnung	74
6.5	Experimentelle Validierung der Ergebnisse	78
7	Methoden zur Bewertung passiver und aktiver Systeme auf Basis der STI	80
7.1	Bestimmen der STI und der Divergenz der STI	80
7.2	Aufstellen der Energiebilanz im Frequenzbereich	80
7.3	Platzierung von Aktoren unter energetischen Gesichtspunkten	85
8	Aktiver Eingriff in den Energiefluss	88
8.1	Bestimmung der Aktorpositionen auf der Struktur	88
8.2	Abgleich des analytischen Plattenmodells mit dem Prüfstand	89
8.3	STI-Regler auf Basis des 2-Aufnahmeverfahrens	91
8.4	Numerische Simulation der geregelten Systeme	93
8.5	Experimentelle Validierung der Simulationsergebnisse	98
9	Zusammenfassung und Ausblick	102
9.1	Wesentliche Ergebnisse	102
9.2	Ausblick - Experimentelle Bestimmung des Longitudinalwellenanteils der STI	105
9.3	Bestehender Forschungsbedarf	109
A	Anhang	111
A.1	Eigenfrequenzen der Platte	111
A.2	Zustandsraumdarstellung des Plattenmodells	112
A.3	Auswirkung gestreuter Verschiebungswerte auf die Berechnung der STI in der Simulation	114
A.4	Weitere Abbildungen zu Kapitel 5.2.2 und Kapitel 5.2.3	116
A.5	Analytische Berechnung des STI-Integrals	119
A.6	Berechnungsmethoden der Sensitivitätsanalyse	120
A.7	Numerische und experimentelle Simulation des geregelten Systems mit Impulsanregung .	123
	Literaturverzeichnis	129

Abbildungsverzeichnis

2.1	Verteilungsfunktion L	14
2.2	Vergleich der Berechnungsverfahren am Beispiel der ersten Eigenfrequenz	14
2.3	Verteilung der Schubspannungen τ und der Normalspannung σ in der Klebeschicht zwischen Piezopatch und Platte	18
2.4	Ableitungen der Heavisidefunktion H (qualitative Darstellung)	19
3.1	Definition der Verschiebungsrichtungen und Winkel	22
3.2	Aktiver Teil (Realteil, oben) und reaktiver Teil (Imaginärteil, unten) der STI für die 1-1-Mode	27
3.3	Potentielle Energie, kinetische Energie und Gesamtenergie einer krafterregten Platte (Stahl, 850 mm x 550 mm x 1,5 mm, allseitig gelenkige Lagerung)	29
3.4	Divergenz der STI in der 1-2-Mode, die Kraftanregungsstelle ist durch einen schwarzen Punkt gekennzeichnet	30
3.5	Intensitätsfluss in der 1-2-Mode, die Anregungsstelle ist durch einen schwarzen Punkt gekennzeichnet	31
3.6	Wirbelentstehung durch Überlagerung von Verschiebungsbereichen von Moden	31
4.1	Anordnung der Messpunkte des 8-Aufnehmerverfahrens	35
4.2	Relativer Fehler des 8-Aufnehmerverfahrens in Abhängigkeit von der Vernetzungsdichte .	36
4.3	Relativer Fehler des 8-Aufnehmerverfahrens in Abhängigkeit von der Frequenz	37
4.4	Messpunkte für die Berechnung der STI nach dem 2-Aufnehmerverfahren	38
4.5	Relativer Fehler des 2-Aufnehmerverfahrens in Abhängigkeit von der Vernetzungsdichte .	38
4.6	Relativer Fehler des 2-Aufnehmerverfahrens in Abhängigkeit von der Frequenz	39
4.7	Wellenzahlbereich nach 2-D-FFT	40
4.8	Relativer Fehler des Fourier-Verfahrens in Abhängigkeit von der Vernetzungsdichte	41
4.9	Relativer Fehler des Fourier-Verfahrens in Abhängigkeit von der Frequenz	42
4.10	Relativer Fehler des Gradientenverfahrens in Abhängigkeit von der Vernetzungsdichte . .	43
4.11	Relativer Fehler des Gradientenverfahrens in Abhängigkeit von der Frequenz	44
4.12	Relativer Fehler des CDS-Verfahrens in Abhängigkeit von der Vernetzungsdichte	45
4.13	Relativer Fehler des CDS-Verfahrens in Abhängigkeit von der Frequenz	46
4.14	STI-Verlauf aller untersuchten Berechnungsverfahren für die 1-2-Mode	47
4.15	Relativer Fehler des Betrages der STI der untersuchten Berechnungsverfahren für die 1-2-Mode	48
5.1	Experimentell bestimmte Phase bei 76 Hz (1-2-Mode)	50
5.2	Experimentell bestimmter STI-Verlauf bei 76 Hz (1-2-Mode)	51
5.3	Experimentell bestimmter STI-Verlauf bei 31 Hz (1-1-Mode)	51
5.4	Experimentell bestimmter STI-Verlauf bei 221 Hz (4-3-Mode)	52

5.5	STI berechnet aus gemessenen Daten (76 Hz, 1-2-Mode) ohne Filterung (links) und mit Filterung (rechts)	53
5.6	Mittlere Fehler $\epsilon_{\text{Betrag, gestreut}}$ und $\epsilon_{\text{Betrag, gemittelt}}$ der Realteile der STI	55
5.7	Mittlere Fehler $\epsilon_{\text{Winkel, gestreut}}$ und $\epsilon_{\text{Winkel, gemittelt}}$ der Realteile der STI	56
5.8	Standardabweichung der Fehler $\epsilon_{\text{Winkel, gestreut}}$ und $\epsilon_{\text{Winkel, gemittelt}}$ der Realteile der STI . . .	57
5.9	Mittlere Fehler $\epsilon_{\text{Betrag, gestreut}}$ und $\epsilon_{\text{Betrag, gemittelt}}$ der Realteile der STI	58
5.10	Mittlere Fehler $\epsilon_{\text{Winkel, gestreut}}$, $\epsilon_{\text{Winkel, gemittelt}}$ und $\epsilon_{\text{Winkel, Betrag und Winkel gemittelt}}$ der Realteile der STI in Abhängigkeit von der Streuung des Betrages der Verschiebung	59
5.11	Mittlere Fehler $\epsilon_{\text{Betrag, gestreut}}$, $\epsilon_{\text{Betrag, gemittelt}}$ und $\epsilon_{\text{Betrag, Betrag und Winkel gemittelt}}$ der Realteile der STI in Abhängigkeit von der Streuung des Phasenwinkels der Verschiebung	60
5.12	Mittlere Fehler $\epsilon_{\text{Winkel, gestreut}}$, $\epsilon_{\text{Winkel, gemittelt}}$ und $\epsilon_{\text{Winkel, Betrag und Winkel gemittelt}}$ der Realteile der STI in Abhängigkeit von der Streuung des Phasenwinkels der Verschiebung	60
5.13	Mittlere Fehler $\epsilon_{\text{Winkel, gestreut}}$, $\epsilon_{\text{Winkel, gemittelt}}$ und $\epsilon_{\text{Winkel, Betrag und Winkel gemittelt}}$ der Imaginärteile der STI in Abhängigkeit von der Streuung des Phasenwinkels der Verschiebung	61
5.14	Parametrisierte Abmessungen der Platte, der Shaker (Kreis) wird parameterabhängig innerhalb der türkisen Fläche platziert	62
5.15	Schnittpunkte des Fehlers $\epsilon_{\text{Betrag, gestreut}}$ mit dem Fehler $\epsilon_{\text{Betrag, gemittelt}}$ der Realteile der STI in Abhängigkeit vom Seitenverhältnis der Platte	62
5.16	Schnittpunkte des Fehlers $\epsilon_{\text{Winkel, gestreut}}$ mit dem Fehler $\epsilon_{\text{Winkel, gemittelt}}$ der Realteile der STI in Abhängigkeit vom Seitenverhältnis der Platte	63
6.1	Konvergenzfehler der Haupteffekte aller Parameter	71
6.2	Konvergenzfehler gemittelt über die Totaleffekte nach Sobol und Jansen aller Parameter .	72
6.3	Totaleffekt nach Sobol für alle Parameter ($P_1 - P_4$), aufgetragen über der Frequenz	73
6.4	Totaleffekt nach Sobol in den Eigenfrequenzen und Antiresonanzen für den Parameter P_4 (Stützstellenanzahl), aufgetragen über der Frequenz	73
6.5	Mittelwert des relativen Fehlers $\epsilon_{P_{\text{rel, Int}}}$ in Abhängigkeit vom Integralabstand und von der Diskretisierung	75
6.6	Standardabweichung des relativen Fehlers $\epsilon_{P_{\text{rel, Int}}}$ in Abhängigkeit vom Integralabstand und von der Diskretisierung	76
6.7	Mittelwert des relativen Fehlers $\epsilon_{P_{\text{rel, Int}}}$ in Abhängigkeit von der Frequenz und von der Diskretisierung	77
6.8	Vergleich des STI-Verlaufs im Bereich des Kraftangriffspunktes bei 448,7 Hz (36. Eigenfrequenz) bei unterschiedlicher Diskretisierung, links 40 x 20 Punkte, rechts 100 x 50 Punkte	77
6.9	Mittelwert und Standardabweichung des Fehlers $\epsilon_{P_{\text{rel, Int}}}$ in Abhängigkeit vom Integralabstand	78
6.10	Mittelwert des relativen Fehlers $\epsilon_{P_{\text{rel, Int}}}$ in Abhängigkeit von der Frequenz und von der Diskretisierung	79
7.1	STI und Divergenz der STI bei 110 Hz, Rahmen an vier Ecken elastisch gelagert	81
7.2	Platte mit Dämpfungsbelag links unten, Integrale durch farbige Rechtecke gekennzeichnet	81

7.3	Leistungsbilanz im Frequenzbereich (Experiment)	82
7.4	Zu- und abgeführte Leistung zweier Kräfte auf einer ideal ungedämpften Platte (numerische Simulation)	83
7.5	Zu- und abgeführte Leistung zweier Kräfte auf einer gedämpften Platte $\xi = 0,01$ (numerische Simulation)	84
7.6	Zu- und abgeführte Leistung in Abhängigkeit vom Phasenwinkel, Vergleich zwischen numerischer Simulation und Experiment	84
7.7	Steuerbarkeitsindex gewichtet mit der Divergenz der STI	85
7.8	Ablaufplan der STI-Berechnung	86
8.1	Steuerbarkeitsindex für Kraftanregung unter Berücksichtigung von 13 Moden	89
8.2	Aktorplatzierung auf der Platte, Shaker (Punkt) links unten, Piezopatch (Rechteck) rechts oben, Sensorposition (X)	90
8.3	Vergleich zwischen Experiment und numerischer Simulation	90
8.4	Blockschaltbild des fx-LMS-Reglers	92
8.5	Struktur des adaptiven Reglers, STI-Berechnung mit vier Beschleunigungsgrößen	92
8.6	Zeitverlauf der Schwinggeschwindigkeit der geregelten Systeme, Beschleunigungsregelung (b) blau, STI-Regelung (STI) rot	94
8.7	Frequenzbereichsdarstellung der Schwinggeschwindigkeit der geregelten Systeme, Beschleunigungsregelung (b) blau, STI-Regelung (STI) rot	94
8.8	STI-Verlauf des unregulierten Systems bei 76 Hz (1-2-Mode)	95
8.9	STI-Verlauf der geregelten Systeme, links Beschleunigungsregelung, rechts STI-Regelung bei 76 Hz (1-2-Mode)	95
8.10	Zu- und abgeführte Leistung der Aktoren, links Beschleunigungsregelung, rechts STI-Regelung	96
8.11	Über die Platte gemittelte STI im Zeitbereich, Beschleunigungsregelung (b) blau, STI-Regelung (STI) rot	97
8.12	STI im Sensorpunkt im Zeitbereich, links Beschleunigungsregelung, rechts STI-Regelung	97
8.13	Zeitverlauf der Schwinggeschwindigkeit der geregelten Systeme, Beschleunigungsregelung links, STI-Regelung rechts	98
8.14	FFT der Schwinggeschwindigkeit der geregelten Systeme, Beschleunigungsregelung links, STI-Regelung rechts	99
8.15	STI-Verlauf bei 76 Hz (1-2-Mode), unreguliert links, Beschleunigungsregelung rechts	100
8.16	STI-Verlauf bei 76 Hz (1-2-Mode), unreguliert links, STI-Regelung rechts	100
8.17	Zu- und abgeführte Leistung der Aktoren, Beschleunigungsregelung links, STI-Regelung rechts	101
9.1	8. in-plane-Mode, links numerische Simulation (4218 Hz), rechts experimentelle Simulation (4295 Hz)	106
9.2	Numerisch bestimmter in-plane-Anteil der STI der achten in-plane-Mode	107
9.3	Experimentell bestimmter in-plane-Anteil der STI der achten in-plane-Mode	108
A.1	Simulierter STI-Verlauf mit fehlerbehafteten Eingangsgrößen bei 76 Hz (1-2-Mode)	114

A.2	Simulierter STI-Verlauf mit fehlerbehafteten Eingangsgrößen bei 231 Hz (4-3-Mode) . . .	115
A.3	Simulierter STI-Verlauf bei 231 Hz (4-3-Mode)	115
A.4	Standardabweichung der Fehler $\epsilon_{\text{Betrag, gestreut}}$ und $\epsilon_{\text{Betrag, gemittelt}}$ der Realteile der STI . . .	116
A.5	Mittlere Fehler $\epsilon_{\text{Betrag, gestreut}}$, $\epsilon_{\text{Betrag, gemittelt}}$ und $\epsilon_{\text{Betrag, Betrag und Winkel gemittelt}}$ der Realteile der STI in Abhängigkeit von der Streuung des Betrages der Verschiebung	117
A.6	Standardabweichung der Fehler $\epsilon_{\text{Betrag, gestreut}}$, $\epsilon_{\text{Betrag, gemittelt}}$ und $\epsilon_{\text{Betrag, Betrag und Winkel gemittelt}}$ der Realteile der STI in Abhängigkeit von der Streuung des Phasenwinkels der Verschiebung	117
A.7	Standardabweichung der Fehler $\epsilon_{\text{Winkel, gestreut}}$, $\epsilon_{\text{Winkel, gemittelt}}$ und $\epsilon_{\text{Winkel, Betrag und Winkel gemittelt}}$ der Realteile der STI in Abhängigkeit von der Streuung des Phasenwinkels der Verschiebung	118
A.8	Mittlere Fehler $\epsilon_{\text{Betrag, gestreut}}$, $\epsilon_{\text{Betrag, gemittelt}}$ und $\epsilon_{\text{Betrag, Betrag und Winkel gemittelt}}$ der Imaginärteile der STI in Abhängigkeit von der Streuung des Phasenwinkels der Verschiebung	118
A.9	Zeitverlauf der Schwinggeschwindigkeit der geregelten Systeme, unregelmäßiges System (u) blau, Beschleunigungsregelung (b) rot, STI-Regelung (STI) grün	124
A.10	Frequenzbereichsdarstellung der Schwinggeschwindigkeit der geregelten Systeme, unregelmäßiges System (u) blau, Beschleunigungsregelung (b) rot, STI-Regelung (STI) grün . . .	124
A.11	Zeitbereichsdarstellung der STI im Sensorpunkt der geregelten Systeme, unregelmäßiges System (u) blau, Beschleunigungsregelung (b) rot, STI-Regelung (STI) grün	125
A.12	Zeitverlauf der Beschleunigung des geregelten Systems mit Beschleunigungsregelung im Sensorpunkt	126
A.13	Zeitverlauf der Beschleunigung des geregelten Systems mit STI-Regelung im Sensorpunkt	126
A.14	Frequenzbereichsdarstellung der Schwinggeschwindigkeit des geregelten Systems mit Beschleunigungsregelung	127
A.15	Frequenzbereichsdarstellung der Schwinggeschwindigkeit des geregelten Systems mit STI-Regelung	127
A.16	Zeitverlauf der STI des geregelten Systems mit Beschleunigungsregelung im Sensorpunkt	128
A.17	Zeitverlauf der STI des geregelten Systems mit STI-Regelung im Sensorpunkt	128

Tabellenverzeichnis

6.1	Wertebereiche der Parameter	69
6.2	Parameter, Effektgrößen und Korrelationen bei 100000 Rechnungen (Integral)	70
A.1	Eigenfrequenzen und Modennummern der Platte (850 mm × 550 mm × 1,5 mm, Stahl: $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$, $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$, $\nu = 0,3$)	111

Verwendete Formelzeichen

Alle Symbole und Variablen, die nicht in der folgenden Tabelle aufgelistet sind, werden direkt im Text erklärt und nicht in der gesamten Arbeit verwendet.

Lateinische Buchstaben	Einheit	Erklärung
B	Nm	Biegesteifigkeit
\mathbf{D}	$\frac{\text{kg}}{\text{s}}$	Dämpfungsmatrix
E	$\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$	E-Modul
\mathbb{E}	—	Erwartungswert
\hat{F}	N	Kraftamplitude
G	$\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$	Schubmodul
$G(s)$	—	Transferfunktion
H	—	Heaviside-Funktion
I, \mathbf{I}	$\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$	Intensität, Intensitätsvektor
J	—	Gütefunktion
\mathbf{K}, k_{mn}	$\frac{\text{N}}{\text{m}}$	Steifigkeitsmatrix, modale Steifigkeit
L	—	Verteilungsfunktion
L	—	Zahl der Wirbel
\mathbf{M}	kg	Massenmatrix
$\mathbf{M}_{\text{mod}}, m_{mn}$	kg	modale Massenmatrix, modale Masse
N	—	Stichprobengröße
N_{Sim}	—	Anzahl Modellsimulationen
O	—	Fehlerordnung
P	W	Leistung
Q	N	Querkraft
\mathbf{S}	$\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$	Spannungstensor
T	W	kinetische Energie
U	V	elektrische Spannung
U	W	potentielle Energie
V	m^3	Volumen
\mathbb{V}	—	Varianz
\mathbb{W}	—	Wahrscheinlichkeit
a, b	m	Abmessungen der Platte in Plattenebene
b	$\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	Beschleunigung
d, d_{mn}	$\frac{\text{kg}}{\text{s}}$	Dämpfungskonstante, modale Dämpfungskonstante

d	m	Aufnehmerabstand
d	—	Störgröße
e	$\frac{W}{m^3}$	Energiedichte
e	—	Fehler
f	Hz	Frequenz
$f(x, y, t)$	N	Punktkraft
h_P	m	Plattendicke
h_p	m	Dicke des Piezopatches
k	—	Parameteranzahl (Sensitivitätsanalyse)
l	m	Länge des Aktors
m, n	—	Nummer der Mode
\mathbf{n}	—	Normalenvektor
$p(x, y, t)$	N	Anregungskraft Piezopatch
p	—	Verteilungsdichte
$q(x, y, t)$	N	Anregung allgemein
s	$\frac{1}{s}$	Laplace-Operator
t	s	Zeit
\mathbf{v}	$\frac{m}{s}$	Geschwindigkeitsvektor
$w(x, y, t)$	m	Verschiebung der Platte in z-Richtung
w	—	Filterkoeffizienten
x, y, z	m	Plattenrichtungen/Koordinaten

Griechische Buchstaben	Einheit	Erklärung
Ω_{mn}	$\frac{\text{rad}}{\text{s}}$	Anregungsfrequenz
Φ	—	Steuerbarkeitsindex
$\delta(x, y)$	—	Dirac-Funktion
ϵ	—	Fehler
μ	—	Mittelwert
μ	—	Schrittweite
ν	—	Querkontraktionszahl
ω	$\frac{\text{rad}}{\text{s}}$	Kreisfrequenz
ω_{mn}	$\frac{\text{rad}}{\text{s}}$	Eigenfrequenz
$\phi_{mn}(x, y)$	—	Eigenfunktion
φ		Winkel
ρ	$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	Dichte
σ_{ij}	$\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$	Spannung/Komponente des Spannungstensors
σ	—	Standardabweichung
σ^2, V	—	Varianz
ξ, ς, w	m	Verschiebungen
ξ	—	Dämpfungsgrad

Indizes	Erklärung
K	Kleber
P	Platte
d	mit Dämpfung
diss	dissipativ
k	kinetisch
m, n	natürliche Zahl
mod	Modal
p	potentiell
rot	rotatorisch
ref	Referenzwert
w	Wellenzahl
x, y	in x-, y-Richtung
zu	zugeführt

1 Einleitung

Die Maschinenakustik beschäftigt sich mit Primärmaßnahmen der Lärminderung an maschinenbaulichen Strukturen und ist ein Themenschwerpunkt des Fachgebietes Systemzuverlässigkeit und Maschinenakustik SzM der TU Darmstadt. Die im Betrieb der Maschine auftretenden Schwingungen werden hierbei durch konstruktive Maßnahmen, wie den gezielten Einsatz von Massen und Steifigkeiten, aber auch durch direkte Beeinflussung der funktionsbedingten Erregerkräfte, reduziert. Für Hersteller rückt die Konstruktion lärmarmer Produkte immer weiter in den Fokus der Entwicklungsaufgaben, da sie vom Gesetzgeber durch immer strengere Grenzwerte, beispielsweise zur Lärmbelastung am Arbeitsplatz, zur Entwicklung leiserer Produkte gezwungen werden. Darüber hinaus fordern zum einen die Kunden zunehmend geräuscharme Produkte, zum anderen können leise Produkte einen entscheidenden Wettbewerbsvorteil gegenüber anderen Herstellern bieten.

Um den gezielten Einsatz konstruktiver Maßnahmen zur Schwingungsminderung zu unterstützen, bietet sich die Betrachtung der Strukturintensität (STI) an. Analog zur Luftschallintensität (SI) beschreibt die STI die Körperschallintensität und damit den Energietransport in Festkörpern. Die STI ist eine komplexe vektorielle Größe, deren Realteil den Wirkleistungsfluss durch die Struktur beschreibt. Der Imaginärteil der STI wird auch als Blindanteil bezeichnet und beschreibt den Energieteil, der in den stehenden Wellen gespeichert ist und sich nicht über die Struktur ausbreitet. Aus der Kenntnis von Betrag und Richtung des STI-Vektors können gezielt konstruktive Maßnahmen abgeleitet werden, die das Schwingungsverhalten und damit die Schallabstrahlung von Strukturen in geeigneter Art und Weise beeinflussen. In dieser Arbeit wird mit Hilfe der STI nachgewiesen, welcher Anteil der Schwingungsenergie durch den Einsatz passiver und aktiver Maßnahmen dissipiert und welcher Anteil durch die Struktur weitergeleitet wird und letztendlich Schallabstrahlung hervorruft. Um dies zu ermöglichen, muss mittels Integration aus der STI die Leistung bestimmt werden, die durch die Schwingungsminierungsmaßnahmen dissipiert wird. Da zur korrekten Berechnung der STI in numerischen Simulationen die Dissipationsmechanismen der Struktur exakt modelliert werden müssen, ist es bei der Untersuchung komplexer Strukturen von großer Wichtigkeit, in experimentellen Simulationen die STI als Referenzgröße richtig berechnen zu können. Da sich vorhandene Messfehler auf den berechneten STI-Verlauf vor allem bei niedrigen Frequenzen negativ auswirken, wird ein Mittelungsverfahren entwickelt, das eine Berechnung der STI aus gemessenen Oberflächengeschwindigkeiten mit sehr geringen Fehlern von Betrag und Richtung ermöglicht.

Durch den zunehmenden Einsatz von Leichtbaustrukturen stoßen die bekannten klassischen passiven aber auch aktiven Maßnahmen zur Schwingungsminderung zunehmend an ihre Grenzen, weil eine Zunahme des Gewichts oder Volumens dieser Strukturen meist ausgeschlossen ist. Um dem zu begegnen, werden am Fachgebiet so genannte adaptronische Systeme untersucht, die durch die Integration von Aktoren und Sensoren in die Struktur charakterisiert sind. Dies ermöglicht vor allem im Hinblick auf Leichtbaustrukturen eine optimale Ausnutzung aller an der Konstruktion beteiligten Werkstoffe. Ein Gebiet, in dem adaptronische Systeme angewendet werden, ist die aktive Reduktion von Schwingungen.

Aktive Systeme ermöglichen es, tonale Einzelkomponenten oder auch gewisse Bandbereiche im Amplitudenspektrum gezielt zu beeinflussen. Kommen darüber hinaus adaptive Regler zum Einsatz, kann das aktive System auch auf instationäre Erregerkräfte mit zeitlich veränderlichen Frequenzanteilen reagieren. In dieser Arbeit wird ein System mit adaptivem Regler zur Schwingungskompensation entwickelt, das als Fehlergröße den Betrag der STI verwendet. Somit ist ein direkter Eingriff in den Energiefluss der Struktur möglich. Als Regelstrecke wird in numerischen Simulationen ein analytisches Plattenmodell verwendet. Um den gezielten Eingriff in die Regelstrecke zu ermöglichen, wird ein piezoelektrischer Plattenaktor (Piezopatch) modelliert und in das analytische Modell integriert. Piezopatches werden häufig als Aktoren in adaptiven Systemen verwendet, da sie auf die Struktur aufgeklebt oder auch in die Struktur eingebracht werden können.

Einen weiteren Themenschwerpunkt des Fachgebietes SzM stellt die Zuverlässigkeitsanalyse komplexer mechatronischer Systeme dar. Die Beurteilung der Zuverlässigkeit wird bei diesen Systemen durch die vielseitigen Wechselwirkungen zwischen Strukturbauteilen, Aktoren, Sensoren und der Regelung deutlich erschwert. Am Fachgebiet werden daher Verfahren der varianzbasierten Sensitivitätsanalyse untersucht und weiterentwickelt, mit denen der Einfluss von Parametern auf die Streuung definierter Zielgrößen quantitativ bestimmt werden kann. In dieser Arbeit werden Methoden der Sensitivitätsanalyse verwendet, um die relevanten Einflussfaktoren auf die Berechnung der Leistung aus der STI zu bestimmen. Weitere Parameterstudien werden durchgeführt, um verschiedene Methoden zur Berechnung der STI anhand von definierten Fehlergrößen zu vergleichen. Somit kann gezeigt werden, dass diese Methoden auch im Bereich der Strukturmechanik angewendet werden können und sich akustische Fragestellungen in Kombination mit Methoden der Sensitivitätsanalyse lösen lassen.

Die Motivation für diese Arbeit ist aus der Bearbeitung des DFG-Projektes „Charakterisierung und aktive Beeinflussung des Energieflusses in adaptiven Strukturen zur Minderung der Schallabstrahlung“ sowie weiterführenden Arbeiten entstanden.

1.1 Stand der Forschung

Dieses Kapitel stellt die für diese Arbeit relevanten Themengebiete in vier Abschnitten vor. Die ersten beiden Abschnitte beschreiben wichtige Arbeiten zur messtechnischen Erfassung der STI sowie zur analytischen und numerischen Berechnung der STI. Im darauf folgenden Abschnitt werden die Grundlagen aktiver Systeme zusammengefasst und auch solche Regelstrategien vorgestellt, die die STI direkt beeinflussen. Der vierte Abschnitt gibt eine kurze Einführung in die benötigten Berechnungsmethoden der Sensitivitätsanalyse.

Messmethoden der Strukturintensitätsanalyse

Die STI wurde in der Literatur erstmals 1970 von NOISEUX [48] beschrieben. Durch Vereinfachung der mathematischen Formulierungen zur Berechnung der STI leitet NOISEUX ein Messverfahren zur Bestimmung der STI aus Biegewellen ab. Aufgrund der Vereinfachungen ist dieses Verfahren nur im Körperschallfeld, das heißt in hinreichend großem Abstand von Krafteinleitungsstellen, Einspannun-

gen und Lagerungspunkten bei schwach gedämpften Strukturen gültig. Der Realteil der komplexen STI (aktiver Anteil, auch Wirkintensität) beschreibt den Energiefluss in der Struktur. Über die Bedeutung des Imaginärteils der STI (reaktiver Anteil, auch Blindintensität) wird in der Fachwelt noch immer diskutiert. Der reaktive Anteil kann als der Energieanteil interpretiert werden, der in den stehenden Wellen gespeichert ist, sich also nicht über die Platte bewegt [40]. PAVIC [53] beispielsweise spricht in einer Veröffentlichung dem Imaginärteil der STI keine physikalische Bedeutung zu. Das STI-Messverfahren wurde von PAVIC [52] erweitert, so dass auch der Einfluss des akustischen Freifeldes (Nahbereich um Krafteinleitungsstellen, Einspannungen und Lagerungspunkte) auf die Berechnung und damit den Verlauf der STI berücksichtigt werden kann. Das erweiterte Messverfahren ist somit auf der ganzen Struktur anwendbar, allerdings werden bei PAVIC [52] acht Beschleunigungsaufnehmer eingesetzt, um die STI in den verschiedenen Ausbreitungsrichtungen in Plattenebene zu erfassen. Dies hat den Nachteil, dass das Verfahren aufgrund der Größe des Messrasters nicht direkt an den Rändern der Struktur eingesetzt werden kann. Darüber hinaus ist es durch die größere Anzahl an verwendeten Messpunkten anfälliger für systematische Messfehler. VERHEIJ [80] hat die Arbeiten von PAVIC aufgegriffen und berechnet aus den Kreuzleistungsspektren gemessener Beschleunigungen auch den Longitudinalwellenanteil der STI. Die experimentelle Bestimmung der STI beschränkt sich jedoch meist auf die Berechnung der STI aus den Biegewellenanteilen der Strukturschwingungen. In der Literatur wird die Berechnung der in-plane-Anteile der STI nur für wenige weitere Fälle wie beispielsweise von EXNER [13] für die eindimensionale Wellenausbreitung oder von FRESCHI [16] für die Wellenausbreitung in einem L-förmigen Balken beschrieben.

Modernere Messmethoden bestimmen die Geschwindigkeitsverteilung auf der Struktur berührungslos mit einem Scanning-Laservibrometer. 1993 stellte McDEVITT [41] ein Messverfahren zur Bestimmung der STI aus Biegewellen vor, für das er ein zweikanaliges Lasersystem verwendet. In [42] erweitert er das bestehende Verfahren, um auch die STI aus Longitudinalwellen messen zu können. Die Ergebnisse dieser Verfahren vergleicht er mit zwei weiteren Berechnungsmethoden, die auf der Energieverteilung und auf den stehenden Wellen beruhen. Insbesondere für die STI aus Biegewellen stimmen die Ergebnisse von McDEVITT für alle drei Verfahren sehr gut überein. Ein von BLOTTER [6] vorgestelltes Verfahren wird als Experimental Spatial Power Flow (ESPF) bezeichnet. Die STI wird mit einem FE-Modell (dreidimensionales Geschwindigkeitsfeld) berechnet, welches durch ein Kleinste-Fehlerquadrate-Verfahren an die Messergebnisse (ca. 30000 Punkte auf der Platte) angepasst werden muss. Die quantitative Bestimmung der zugeführten Leistung kann so mit einem Fehler von etwa 10 % berechnet werden. Nachteil dieser Methode ist die lange Messdauer und Rechenzeit, die die Autoren, basierend auf damals (2002) aktueller Rechnertechnik, mit insgesamt etwa fünf bis sechs Stunden pro berechneter Frequenzstützstelle angeben.

Zur Bestimmung der STI unter Verwendung numerischer Ableitungen muss die räumliche Ableitung dritter Ordnung berechnet werden, was bei Verwendung der Methode der zentralen Differenzen zu erheblichen Fehlern führen kann, da Einflüsse durch Messrauschen infolge der Verwendung von Differenzenquotienten verstärkt werden. Daher wird ein alternativer Ansatz zur Bestimmung der STI mit Verfahren verfolgt, die aus Ergebnissen von Schalldruckmessungen im Nahfeld der Struktur (Nahfeldholographie) die STI berechnen. Einen Überblick über die grundlegenden Berechnungsmethoden zur Holographie gibt MAYNARD [39]. Das von WILLIAMS [86] vorgestellte Messverfahren macht sich die

Inkompressibilität der Luft nahe der schwingenden Oberfläche zunutze, um aus dem Schalldruck mit räumlichen Fouriertransformationen das Geschwindigkeitsfeld auf der Platte zu berechnen (Details zur Berechnung in Abschnitt 4.1.4). PASCAL und WILLIAMS [51, 86] nutzen die Fouriertransformation im Wellenzahlbereich zur Bestimmung der örtlichen Geschwindigkeitsableitungen in der Berechnungsgleichung der STI, um die Berechnung der STI robuster gegen diese Rauscheinflüsse zu machen. MORIKAWA, WILLIAMS und ZHANG [45, 84, 88] wenden ein Tiefpassfilter auf die diskreten Fouriertransformationen an, um Rauschen durch hochfrequente Wellenanteile im Wellenzahlbereich zu unterdrücken. NEJADE [47] erweitert dieses Verfahren und stellt ein Bandpassfilter vor, das bei der Strukturwellenzahl (Biegewellenzahl) zentriert wird. Abhängig von der gewählten Filterbreite im Wellenzahlbereich kann entweder der Energiepfad oder die Quellenverteilung in der Auswertung hervorgehoben werden.

Simulationsmethoden der Strukturintensitätsanalyse

Mit der analytischen Modellierung und der numerischen Berechnung der STI für Platten und Balken beschäftigen sich u. A. GAVRIC [18] und HAMBRIC [21, 22]. GAVRIC stellt die notwendigen Berechnungsgleichungen für Balken, Schalen und Platten auf, um die STI numerisch zu berechnen. Für eine allseitig gelenkig gelagerte Platte vergleicht er die numerischen Ergebnisse mit der analytischen Lösung. Werden in der analytischen Lösung mindestens 6 x 6 Moden berücksichtigt, kann in der numerischen Simulation der Energieaustausch zwischen einem Dämpferelement und der Quelle quantitativ korrekt berechnet werden. Mit Hilfe der STI können auch Quellen und Senken auf der Platte lokalisiert werden, nach GAVRIC müssen dafür allerdings mehr als 20 x 20 Moden in der analytischen Lösung verwendet werden. HAMBRIC [21] vergleicht Messungen an einem Balken mit Ergebnissen einer FE-Simulation. Darüber hinaus analysiert HAMBRIC in einer Simulation eine versteifte Rechteckplatte und kann zeigen, dass sich die Körperschallintensität entlang der Versteifungen in der Struktur ausbreitet. Weitere gekoppelte Strukturen wie Plattenstöße, Stabverbindungen oder dissipative Verbindungen werden z. B. von PARK, PASCAL, PAVIC und SZWERC [49, 50, 55, 72] untersucht.

Das Auftreten von Wirbeln im Intensitätsverlauf einer allseitig gelenkig gelagerten dünnen Platte wird von TANAKA [73, 74] durch die Überlagerung mehrerer Moden erklärt. Nach dieser Theorie entstehen Wirbel, wenn mindestens zwei Eigenmoden einen ähnlich hohen energetischen Beitrag zur Betriebschwingform beisteuern, wobei diese Moden nicht zwingend im Frequenzbereich benachbart sein müssen. TANAKA untersucht in seinen Arbeiten ein Modell mit zwei Kräften gleicher Frequenz. Er variiert die Phase der einen Kraft so, dass sich auf der Platte ein Schwingungszustand einstellt, der eine der beiden Kräfte als Senke und die andere als Quelle wirken lässt. Für höhere Moden fließt die Energie nicht, wie anzunehmen, direkt von der Quelle in die Senke, es bilden sich vielmehr Verwirbelungen aus, die als typisch für die jeweilige Betriebsschwingform angesehen werden können. Die Simulationsergebnisse bestätigt TANAKA anhand von experimentellen Untersuchungen. Des Weiteren zeigt TANAKA [73] zum einen eine Methode, bei der unter Verwendung von vier Shakern künstlich ein Intensitätswirbel in der Struktur erzeugt werden kann. Zum anderen zeigt er, dass die parallel zur Strukturoberfläche verlaufenden Anteile der Luftschallintensität (SI) in Oberflächennähe dem Verlauf der aktiven STI entsprechen.

In der Arbeit von VERGOTE [79] zur numerischen Simulation der STI wird ein mathematischer Ansatz, der auf Wellengleichungen basiert, verwendet. Bei der so genannten Wave Based Method wird das Re-

chengebiet in Teilbereiche unterteilt, in denen die Feldgrößen mit Hilfe von Wellengleichungen beschrieben werden. Diese Wellenansätze erfüllen die verwendeten Differentialgleichungen exakt, das heißt, im Problemgebiet werden im Gegensatz zur Finite-Elemente-Methode (FEM) keine Approximationsfehler gemacht. Fehler, die durch Verletzung von Randbedingungen entstehen, werden durch einen Ansatz mit gewichteten Residuen minimiert. Diese Methode führt im Vergleich zur FEM zu deutlich kleineren Systemmatrizen. Vor allem im Hinblick auf die Berechnung der STI in komplexen Strukturen sowie bei der Simulation von Systemen im Zeitbereich kann diese Methode zu deutlich kürzeren Rechenzeiten führen. HAN [23] stellt ein Berechnungsmodell der STI für Platten auf, die von einem Fluid überströmt werden. In Abhängigkeit vom Winkel zur Strömungsrichtung variiert die Gruppengeschwindigkeit und damit der Energiefluss in der Platte. Das Berechnungsmodell wird auf eine gelenkig gelagerte Platte und eine gekoppelte Plattenstruktur angewendet. Die Ergebnisse werden mit der analytischen Lösung des Energieflusses verglichen.

Die meisten der vorgestellten Untersuchungen zur STI gehen von deterministischen Signalen aus, die an diskreten Punkten auf die Struktur einwirken. In der Realität werden die Strukturen jedoch häufig von Flächenkräften, wie Schalldruckfeldern oder schwankenden Druckkräften, wie sie beispielsweise in turbulenten Strömungen vorliegen, erregt. Diese Kräfte besitzen ein rauschartiges oder periodisches Anregungsspektrum. Diesem Problem begegnet DALEY [10] mit einem neuen analytischen Ansatz zur Berechnung der STI. Dieser Ansatz kommt ohne die Approximation durch finite Differenzen aus. Durch die Kombination von Übertragungsfunktionen aus analytischen Modellen oder Finite-Elemente-Modellen mit den Matrizen der Kreuzleistungsspektren der flächenhaften Erregungskräfte kann die Intensität in der Struktur berechnet werden. Diese Methode eignet sich besonders dazu, die STI in komplexen, gekrümmten Strukturen, nichtisotropen Materialien oder Strukturen mit Inhomogenitäten zu berechnen, wobei die Anregung durch Flächenkräfte mit breitbandigem Spektrum erfolgt. Da sich für unterschiedliche Eigenfrequenzen unterschiedliche Energiepfade ergeben, ist eine breitbandige Energiebetrachtung, wie sie für den Fall der oben genannten Anregung oder der Stoßanregung notwendig ist, zunächst schwierig. Um aber dennoch Analysen über mehrere Frequenzen durchzuführen, kann man die frequenzabhängigen Beiträge der STI-Vektoren über den betrachteten Frequenzbereich integrieren. Somit erhält man einen Hinweis auf Strukturbereiche, die im untersuchten Frequenzbereich eine hohe oder eine geringe Energieflussdichte aufweisen.

MEUDT [43] untersucht in seiner Arbeit den Einfluss von Rippen und Plattenabsätzen auf den STI-Verlauf. Darüber hinaus berechnet er die STI für einen Stahlkasten aus numerisch und experimentell ermittelten Geschwindigkeitsdaten. STEIN [70] betrachtet den Beitrag einzelner Kraft- und Momentenanteile an der Gesamtintensität und kann für die gelenkig gelagerte Rechteckplatte zeigen, dass für tiefe Frequenzen der Querkraftanteil dominiert. KÜHL [28] gelingt es, die Luftschallabstrahlung einer Platte zu beeinflussen, indem der Energiefluss gezielt in eine mit einem Dämpfungsbelag versehene Substruktur umgeleitet wird. In Simulationen und Experimenten kann gezeigt werden, dass in diesem Fall die STI bis 250 Hz in die dafür angebrachte Substruktur geleitet werden kann.

Aktive Beeinflussung der Strukturintensität

Der erste dokumentierte Ansatz zur aktiven Lärminderung geht auf LUEG [35] zurück. In einem Patent stellt er ein Verfahren zur Luftschallreduktion durch Überlagerung mit gegenphasigen Schallwellen vor. Ein alternativer Ansatz zur aktiven Schallminderung besteht darin, direkt Einfluss auf die Struktur zu nehmen, von der der Schall abgestrahlt wird. Dieses Verfahren wird beispielsweise von FULLER [17] angewendet. Ein geregeltes System leitet mit elektrodynamischen Shakern Gegenschwingungen in eine Plattenstruktur ein, um die Schwingungen und damit die Schallabstrahlung zu minimieren. Der Leistungsfluss in elastischen Strukturen wird 1987 von REDMAN-WHITE [57] aktiv beeinflusst. Ziel ist es, an einem Balken die Energie der Biegewellen, die hauptsächlich für die Schallabstrahlung verantwortlich sind, zu minimieren. Der aktive Eingriff erfolgt durch zwei dicht benachbarte Kräfte (Shaker), die zusätzlich zur Störanregung an der Struktur angreifen. Es gelingt einerseits, mit den Shakern den Schwingungszustand des Balkens so zu beeinflussen, dass die Shaker als Senke wirken und damit die Energiedissipation erhöht wird. Andererseits kann die Energie in akustisch unkritische Bauteilregionen umgeleitet werden. 1994 veröffentlicht SCHWENK [65] einen Artikel über die aktive Beeinflussung der STI in einem Stahlbalken. Die STI wird als Regelgröße verwendet und aus den Signalen von fünf Beschleunigungsaufnehmern mittels Differenzenquotient berechnet. Die Störgröße und die Kontrollkraft werden mit Shakern aufgebracht. Es werden verschiedene Regelalgorithmen zur Regelung der STI implementiert und mit der Regelung der Beschleunigung verglichen. Die Verwendung der Beschleunigung als Regelgröße ermöglicht in den untersuchten Fällen im Vergleich zur STI-Regelung eine effektivere Reduzierung der Systemschwingungen, da das Messrauschen durch die Differenzenbildung zur Berechnung der STI ungünstig verstärkt wird und so die Leistung der Regelung beeinträchtigt. Auch AUDRAIN [1, 2] regelt den Energiefluss in einem Balken. Er verwendet als Sensoren fünf Beschleunigungsaufnehmer und als Aktoren zwei Piezopatches. Als Vorteil der Regelung mit der STI als Regelgröße gegenüber der Beschleunigung als Regelgröße führt Audrain an, dass das Verhalten und die Güte der Regelung weniger abhängig von der Position des Sensors ist. Darüber hinaus kann der Sensor wesentlich näher am Aktor platziert werden, um dadurch in der Praxis einen sehr kompakten Aufbau zu erreichen.

Werden klassische Ansätze der Regelungstechnik verwendet, um flächige Strukturen zu beruhigen, bleiben die Ergebnisse häufig hinter den Erwartungen zurück, da nur kleine Bereiche der Struktur beeinflusst werden können. Es müsste eine Vielzahl von Sensoren und Aktoren zum Einsatz kommen, um großflächig eine Wirkung auf der Struktur zu erzielen. Mit diesem Ansatz werden schnell die Grenzen verfügbarer Rechnerleistung erreicht, vor allem, wenn adaptive Filter zur Regelung oder Signalaufbereitung verwendet werden. Der von TANAKA [78] vorgestellte Ansatz fasst daher die im relevanten Frequenzbereich liegenden Moden in unterschiedlichen Gruppen zusammen. Die Moden werden aufgrund ihrer Symmetrieeigenschaften in verschiedene Gruppen einsortiert. Jede dieser Gruppe kann separat geregelt werden [76], wodurch die Anzahl von Sensoren und Aktoren und damit auch die Rechenzeit verringert werden kann. Die Sensoren und Aktoren sind so platziert, dass die Gruppen sich nicht gegenseitig beeinflussen. Aufbauend auf diesen Untersuchungen ist es TANAKA [77] gelungen, mit drei Kontrollkräften eine schwingungsfreie Zone auf einer Platte zu generieren. Die Simulationsergebnisse konnten von Tanaka im Experiment bestätigt werden.

Methoden der Sensitivitätsanalyse

Unter dem Stichwort Sensitivitätsanalyse werden Methoden zusammengefasst, mit denen Modelle realer Systeme analysiert, bewertet und optimiert werden. Basierend auf Simulationen werden unter Verwendung verschiedener Berechnungsmethoden und Bewertungsmaße die Einflüsse von Eingangsparametern auf die zu definierende Zielgröße quantifiziert. Weist das zu untersuchende System ein hinreichend komplexes und nichtlineares Verhalten auf, eignen sich hierzu insbesondere die Verfahren der varianzbasierten Sensitivitätsanalyse. Eine Übersicht über Methoden sowie Anwendungsbeispiele findet sich in den Veröffentlichungen von SALTELLI [60, 61, 62].

Eine häufig betrachtete Fragestellung ist die Platzierung von Aktoren auf der Struktur und die Untersuchung der hieraus resultierenden Einflussfaktoren auf die Wirkung der Aktoren mittels Sensitivitätsanalyse. Arbeiten zu diesem Thema haben beispielsweise MUKHERJEE und JOSHI [46] sowie KÖGL und SILVA [27] veröffentlicht. FRECKER [15] fasst die bis 2002 erschienenen Arbeiten zur Thematik der Optimierung adaptronischer Strukturen zusammen. Als Variablen werden in diesen Veröffentlichungen meist die Topologie der Struktur, die Aktorposition sowie die Parameter des zugrunde liegenden Regelalgorithmus betrachtet. Mögliche Zielfunktionen sind zum Beispiel die Maximierung des Steuerbarkeitsindex oder die Minimierung der mechanischen Auslenkung. Untersuchungsobjekte sind meist einfache Strukturen, die aus Balken- oder Plattenelementen aufgebaut sind. Als Beispiel einer komplexeren Struktur dient der von BELLOLI [5] untersuchte Heckflügel eines Rennwagens, auf dem piezoelektrische Plattenaktoren mittels Optimierungsrechnung platziert wurden.

Ein weiterer wichtiger Aspekt ist die Bewertung der Zuverlässigkeit aktiver Strukturen. Dieses Thema wurde bisher in nur sehr wenigen Publikationen behandelt. Ein wichtiges Element der Zuverlässigkeitsbewertung von adaptronischen Strukturen ist die Berücksichtigung der Streuung von Parametern. SPENCER et al. [68] verwenden zum Beispiel die First Order Reliability Method (FORM) und die Second Order Reliability Method (SORM) zur Berechnung der Wahrscheinlichkeiten der Instabilität einer geregelten Struktur unter dem Einfluss von Parameterstreuungen.

Weitere Veröffentlichungen zu den Verfahren der Sensitivitätsanalyse werden ausführlich in der Dissertation von HAN [24] dargestellt.

1.2 Ziele der Arbeit

Ziel dieser Arbeit ist es, Methoden auf Basis der STI zu entwickeln, mit denen die durch passive oder aktive Maßnahmen zur Schwingungsminderung dissipierte Leistung quantitativ bestimmt werden kann. Der zentrale Punkt dieser Arbeit ist demnach die quantitativ korrekte Berechnung der STI in numerischen und experimentellen Simulationen. Die hierfür durchzuführenden numerischen und experimentellen Untersuchungen werden wie folgt in fünf Hauptpunkte unterteilt.

1. Modellbildung und Berechnung der STI (Kapitel 2 und Kapitel 3)

Um grundlegende Zusammenhänge zwischen Energiegrößen, Zustandsgrößen der Struktur und der STI zu beschreiben und um Paramtereinflüsse auf den Leistungsfluss zu untersuchen, wird für numerische Simulationen ein analytisches Modell einer KIRCHHOFF-Platte verwendet. Da das Plattenmodell in Simulink für die Auslegung geregelter Systeme verwendet werden soll, muss neben einer Punktkraft auch ein

Piezopatch modelliert und in das analytische Modell integriert werden. Um mit dem Plattenmodell das Verhalten des Prüfstandes möglichst exakt beschreiben zu können, soll ein Ansatz erweitert werden, der von WARBURTON und EDNEY [83] vorgestellt wurde. Mit diesem Ansatz werden die realen Einspannungsverhältnisse am Prüfstand durch Überlagern der Eigenformen der gelenkigen Lagerung und der festen Einspannung abgebildet. Darüber hinaus wird auf Basis dieses Modells abgeleitet, wie die STI für die KIRCHHOFF-Platte aus Verschiebungsgrößen berechnet werden kann.

2. Vergleich verschiedener Verfahren zur Berechnung der STI (Kapitel 4)

Es gibt eine Vielzahl von Verfahren zur Berechnung der STI wie beispielsweise das 2-Aufnehmerverfahren von NOISEUX [48] oder das 8-Aufnehmerverfahren von PAVIC [52], die auf unterschiedlichen Annahmen und Vereinfachungen beruhen. Für diese Methoden wurde bereits von MEUDT [43] eine Fehlerbetrachtung durchgeführt. Es existiert bislang jedoch kein umfassender Vergleich, der die weiteren bekannten Methoden mit einbezieht. Daher werden in dieser Arbeit fünf STI-Berechnungsverfahren sowohl qualitativ (Verlauf der STI) als auch quantitativ untersucht, indem die Parameter Frequenz und Diskretisierung des Modells in vorgegebenen Grenzen variiert werden und der Fehler zwischen den Näherungsverfahren und der analytischen Lösung der STI bestimmt wird. Dies ermöglicht eine Bewertung der Verfahren anhand der variierten Parameter. Ziel ist es, das für die Berechnung der Leistung aus der STI am besten geeignete Verfahren zu identifizieren.

3. Untersuchung der Auswirkung von Messfehlern auf die Berechnung der STI (Kapitel 5)

Da in den Versuchen die STI für eine Platte aus gemessenen Oberflächengeschwindigkeiten berechnet wird, müssen die Auswirkungen von Messfehlern auf die Berechnung der STI bekannt sein. Der Einfluss von Messrauschen auf die Bestimmung des Energieflusses wurde speziell für die STI-Berechnung mittels räumlicher Fouriertransformation unter Verwendung eines Filters im Wellenzahlbereich von MORIKAWA [45] für einen Balken untersucht. MING [44] untersuchte das 2-Aufnehmerverfahren hinsichtlich der Fehler, die durch die Vernachlässigung von Longitudinalwellen, Schubspannungen oder Drehträgheiten in diesem Verfahren entstehen. Trotz umfangreicher Recherche konnten keine Veröffentlichungen gefunden werden, die allgemeingültig die Auswirkungen von Messfehlern auf den Betrag (Vektorlänge) und den Winkel (Richtung) des STI-Vektors beschreiben. Es sollen daher die Messfehler des verwendeten Messsystems quantifiziert und anschließend die Auswirkungen dieser Fehler auf die Berechnung der STI untersucht werden. Darauf aufbauend wird ein Mittelungsverfahren vorgestellt, um die STI-Berechnung trotz fehlerbehafteter Messungen hinsichtlich Betrag und Winkel wesentlich zu verbessern. Durch einen Abgleich der so gewonnenen Ergebnisse mit der analytischen Lösung der STI sollen die Auswirkungen des Mittelungsverfahrens auf die STI-Berechnung untersucht werden. Eine Verallgemeinerung der Ergebnisse für Platten mit unterschiedlicher Geometrie erfolgt durch eine Monte-Carlo-Simulation, in die als Parameter das Seitenverhältnis der Platte und der Anregungsort eingehen.

4. Bestimmung relevanter Einflussfaktoren auf die Leistungsberechnung (Kapitel 6)

GAVRIC und PAVIC [18] verwendeten für Konvergenzuntersuchungen ein geschlossenes STI-Integral um die Quelle(n) und die Senke(n) einer Platte, um das Ergebnis der Integration mit der tatsächlich zugeführten und dissipierten Leistung zu vergleichen. Diese Technik soll verwendet werden, um die Leistung

zu berechnen, die beispielsweise ein Aktor im Betrieb eines aktiven Systems der Struktur zuführt oder entzieht. Um quantitativ richtige Ergebnisse zu erhalten, ist es wichtig, die Einflussfaktoren auf die Berechnung der Leistung aus der STI mit einem geschlossenen Integral zu kennen. Die Haupteinflüsse auf die Leistungsberechnung werden daher mit einer Sensitivitätsanalyse bestimmt. Die Auswirkungen der so gefundenen maßgebenden Einflussparameter (Größe des Integrationsbereiches, Diskretisierung der Struktur) auf die Leistungsberechnung werden in numerischen und experimentellen Simulationen genauer untersucht. Ziel ist es, einen Abstand der Integrationslinie von der Quelle zu finden, für den der Fehler der mittels Integration aus der STI berechneten Leistung minimal wird.

5. Energetische Bewertung aktiver und passiver Strukturen auf Basis der STI (Kapitel 7, Kapitel 8)

Die Anwendungsmöglichkeiten STI-basierter Bewertungsverfahren sollen anhand eines aktiven Systems demonstriert werden. Hierfür soll ein Regelsystem zur Schwingungskompensation mit adaptivem Filter implementiert werden, das die STI als Regelgröße verwendet. Für einen Balken wurde von SCHWENK [65] ein System mit adaptivem Filter vorgestellt, das die STI in einem Punkt als Fehlersignal nutzt. TANAKA [77] verwendet zur Beeinflussung der Schwingungen auf einer Platte einen deutlich komplexeren Ansatz, der ebenfalls im vorherigen Abschnitt vorgestellt wurde. Für die untersuchte Platte soll ein im Vergleich zu TANAKA einfacheres, STI-basiertes Regelsystem auf Basis eines adaptiven Filters aufgebaut werden. Dies ermöglicht den aktiven Eingriff in den STI-Verlauf in der Struktur. Dieses Regelsystem wird in der numerischen Simulation sowie im Experiment mit einem System, bei dem die Beschleunigung als Regelgröße verwendet wird, verglichen. Auf Basis der STI soll eine energetische Bewertung der beiden Regelsysteme erfolgen.

Annahmen und Restriktionen

Für alle numerischen Simulationen und Experimente wird eine ebene homogene Rechteckplatte aus Stahl ($E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$, $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$, $\nu = 0,3$) mit den Abmessungen 850 mm x 550 mm x 1,5 mm verwendet. Die Platte geringer Dicke kann analytisch mit dem Plattenmodell nach KIRCHHOFF beschrieben werden. Daher werden für die Berechnung der STI auch nur Schwingungen senkrecht zur Plattenoberfläche (Transversalwellen) berücksichtigt.

Darüber hinaus wird für diese Arbeit der Frequenzbereich, in dem die STI untersucht wird, auf 0 Hz bis 500 Hz begrenzt. Geregelte (aktive) Systeme, die in dieser Arbeit auf Basis der STI untersucht und bewertet werden, kommen gewöhnlich in diesem Frequenzbereich zum Einsatz, da die vorhandene Rechnerleistung der Echtzeit-Plattform und die Verstärkertechnik die Anwendbarkeit bei höheren Frequenzen begrenzen [29]. Bei hohen Frequenzen werden alternativ zu aktiven Systemen konstruktive Maßnahmen zur Reduktion der Schwingungen, wie beispielsweise der gezielte Einsatz zusätzlicher Dämmmassen, angewendet. Ein weiterer Aspekt, der für die Begrenzung des Frequenzbereichs spricht, ist die Diskretisierung der Struktur, die für hohe Frequenzen sehr fein sein muss, um auch bei großer modaler Dichte die Plattenschwingungen und die daraus abgeleitete STI richtig zu berechnen. Eine größere Anzahl von Gitterpunkten auf der Struktur hat für die numerische Simulation deutlich längere Rechenzeiten und für die experimentelle Simulation eine wesentlich längere Messdauer mit dem Scanning-Laservibrometer zur Folge.

2 Analytisches Plattenmodell mit piezoelektrischem Plattenaktor

Die numerischen Simulationen werden mit einem analytischen Plattenmodell nach KIRCHHOFF durchgeführt. Die Kraftanregung erfolgt senkrecht zur Plattenmittelebene, Schubspannungen werden vernachlässigt. Die Verschiebung senkrecht zur Oberfläche ist klein gegenüber der Plattendicke. Die Plattendicke ist klein im Verhältnis zu den übrigen Abmessungen, und der Werkstoff ist isotrop.

Um das analytische Modell an die Einspannungsverhältnisse des Prüfstandes anpassen zu können, werden die Randbedingungen mit einem linearen Ansatz aus den Randbedingungen der gelenkig gelagerten Platte und der momentenfest eingespannten Platte berechnet. Die Anregung erfolgt sowohl mit einer punktuellen Kraft als auch mit einem piezoelektrischen Plattenaktor (Piezopatch), der in das analytische Modell integriert wird. Die Verwendung eines analytischen Modells hat wesentliche Vorteile gegenüber einem FE-Modell. Da alle Ergebnisse direkt in Matlab berechnet und ausgewertet werden können, verkürzt dies die Prozesskette der numerischen Simulation. Darüber hinaus eignet sich das analytische Modell sehr gut als Rechenmodell für Parameterstudien, da im Vergleich zu einem FE-Modell die Rechenzeiten reduziert und alle Parameter sehr einfach variiert werden können.

Die Kapitel 2 und 3 orientieren sich an Vorarbeiten von BARTYLLA [4], dessen Diplomarbeit im Rahmen des zugrunde liegenden DFG-Projektes von mir betreut wurde.

2.1 Grundlegende Berechnungsgleichungen einer Platte

Ausgangspunkt ist die Bewegungsgleichung der Platte [20],

$$B \Delta \Delta w(x, y, t) + \rho h \ddot{w}(x, y, t) = q(x, y, t), \quad (2.1)$$

mit der Verschiebung $w(x, y, t)$ senkrecht zur Platte in Abhängigkeit von der Zeit t und den Koordinaten x und y auf der Platte. $q(x, y, t)$ repräsentiert die externe Anregung, ρ die Materialdichte, $B = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ beschreibt die Biegesteifigkeit der Platte mit dem E-Modul E , der Plattendicke h und der Querkontraktionszahl ν . Setzt man die externe Anregung $q(x, y, t)$ gleich 0, können mit dem Ansatz

$$w(x, y, t) = X(x) \cdot Y(y) \cdot T(t) \quad (2.2)$$

aus Gleichung (2.1) die Eigenfunktionen $\phi_{mn}(x, y) = X_m(x) \cdot Y_n(y)$ und die Eigenfrequenzen ω_{mn} der Platte berechnet werden. Die Eigenfunktionen und Eigenfrequenzen sind abhängig von den Randbedingungen (Einspannung) der Platte. Für die allseitig gelenkige Lagerung und die allseitig feste Einspannung der Platte werden die Berechnungsvorschriften für die Eigenfrequenzen und Eigenfunktionen im Folgenden vorgestellt.

Die Eigenfunktionen einer gelenkig gelagerten Platte mit den Abmessungen a und b in x - und y -Richtung können wie folgt berechnet werden:

$$\phi_{mn}(x, y) = X_m(x) \cdot Y_n(y) = \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right). \quad (2.3)$$

Die Variablen m und n sind natürliche Zahlen und legen die Ordnung der Moden fest. Die Eigenfrequenzen einer gelenkig gelagerten Platte werden mit der Gleichung

$$\omega_{mn} = \pi^2 \sqrt{\frac{B}{\rho h}} \left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right] \quad (2.4)$$

berechnet. Die Eigenfunktionen $\phi_{mn}(x, y) = X_m(x) \cdot Y_n(y)$ der fest eingespannten Platte unterscheiden sich deutlich von denen der gelenkig gelagerten Platte. Die Faktoren $X_m(x)$ und $Y_n(y)$ werden durch die Ausdrücke

$$X_m(x) = B \left[\frac{\cosh \alpha_m a}{\sinh \alpha_m a - \sin \alpha_m a} \cdot (\sin \alpha_m x - \sinh \alpha_m x) + \cosh \alpha_m x - \cos \alpha_m x \right], \quad (2.5)$$

$$Y_n(y) = B \left[\frac{\cosh \beta_n b}{\sinh \beta_n b - \sin \beta_n b} \cdot (\sin \beta_n y - \sinh \beta_n y) + \cosh \beta_n y - \cos \beta_n y \right], \quad (2.6)$$

mit $\alpha_m = \frac{2m+1}{2} \frac{\pi}{a}$ und $\beta_n = \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{b}$ bestimmt [7, 20]. Mit diesem Ansatz ergibt sich folgende Näherung für die Eigenfrequenzen der fest eingespannten Platte:

$$\omega_{mn} = \sqrt{\frac{B}{\rho h} (\alpha_m^4 + 2\alpha_m^2 \beta_n^2 + \beta_n^4)}. \quad (2.7)$$

Zur Bestimmung der stationären Lösung der Plattengleichung bei punktförmiger, harmonischer Kraftanregung wird die externe Anregung $q(x, y, t)$ mit Hilfe der Diracfunktion δ modelliert:

$$q(x, y, t) = \hat{F} \cdot \delta(x - x^*, y - y^*) \cdot e^{i\Omega t} = f(x, y, t). \quad (2.8)$$

\hat{F} ist die komplexe Kraftamplitude der harmonischen Anregungskraft mit der Kreisfrequenz Ω , die auf der Platte an der Stelle (x^*, y^*) angreift. Wird die harmonische, punktförmige Anregung aus Gleichung (2.8) in die Bewegungsgleichung (2.1) eingesetzt, ergibt sich die Darstellung

$$B \Delta \Delta w(x, y, t) + \rho h \ddot{w}(x, y, t) = \hat{F} \cdot \delta(x - x^*, y - y^*) \cdot e^{i\Omega t}. \quad (2.9)$$

Der Reihenansatz

$$w(x, y, t) = \sum_{m,n} C_{mn} \phi_{mn}(x, y) e^{st} = \sum_{m,n} C_{mn} \phi_{mn}(x, y) e^{i\Omega t} \quad (2.10)$$

mit $s = i\Omega$ für die harmonische Anregung, den Eigenfunktionen ϕ_{mn} und den Koeffizienten C_{mn} wird in Gleichung (2.9) eingesetzt. Anschließend wird die Gleichung mit den Eigenfunktionen ϕ_{rs} multipliziert und über die Plattenfläche A integriert. Aus Gleichung (2.9) folgt somit

$$\sum_{m,n} C_{mn} \left[\int_A K[\phi_{mn}] \phi_{rs} dA - \Omega^2 \rho h \int_A \phi_{mn} \phi_{rs} dA \right] = \hat{F} \phi_{rs}(x^*, y^*). \quad (2.11)$$

In Gleichung (2.11) steht der Operator K für den steifigkeitsproportionalen Term. Mit Hilfe der Orthogonalitätsbeziehungen können aus Gleichung (2.11) die modalen Massen m_{mn} und die modalen Steifigkeiten k_{mn} berechnet werden.

$$\rho h \int_A \phi_{mn} \phi_{rs} dA = \begin{cases} m_{mn}, & m = r \text{ und } n = s \\ 0, & m \neq r \text{ und } n \neq s, \end{cases} \quad (2.12)$$

$$\int_A K[\phi_{mn}] \phi_{rs} dA = \begin{cases} k_{mn}, & m = r \text{ und } n = s \\ 0, & m \neq r \text{ und } n \neq s. \end{cases} \quad (2.13)$$

Die Koeffizienten C_{mn} werden durch Umstellen von Gleichung (2.11) mit $\omega_{mn}^2 = \frac{k_{mn}}{m_{mn}}$ und der modalen Massenmatrix \mathbf{M}_{mod} berechnet. Die Koeffizienten m_{mn} bilden die Elemente der modalen Massenmatrix $\mathbf{M}_{\text{mod}} = m_{mn}$.

$$C_{mn} = \frac{1}{\mathbf{M}_{\text{mod}}} \frac{\hat{F} \cdot \phi_{mn}(x^*, y^*)}{(\omega_{mn}^2 - \Omega^2)}. \quad (2.14)$$

Aus Gleichung (2.14) wird deutlich, dass die Koeffizienten C_{mn} von den entsprechenden Eigenfunktionen ϕ_{mn} und damit auch vom Ort der punktförmigen Anregungskraft abhängen.

Die Dämpfung wird berücksichtigt, indem eine komplexe Eigenfrequenz

$$\omega_{mn,d} = \omega_{mn} \sqrt{1 + i\xi} \quad (2.15)$$

mit dem Dämpfungsgrad ξ eingeführt wird. Für die Verschiebung der gedämpften Platte mit punktförmiger, harmonischer Anregung ergibt sich die Lösung

$$w(x, y, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{M_{\text{mod}}} \frac{\hat{F} \cdot \phi_{mn}(x^*, y^*)}{(\omega_{mn}^2 (1 + i\xi) - \Omega^2)} \phi_{mn}(x, y) e^{i\Omega t}. \quad (2.16)$$

Eine modale Dämpfung mit unterschiedlichen Dämpfungsgraden ξ_{mn} für jede Mode wird realisiert, indem in Gleichung (2.16) $\xi = \xi_{mn}$ gesetzt wird.

2.2 Beschreibung der Randbedingungen durch gemischte Eigenformen

Im vorherigen Abschnitt wurden die Lösungen für eine allseitig fest eingespannte und eine gelenkig gelagerte Platte hergeleitet. Im Versuch kann allerdings weder eine ideale gelenkige Lagerung noch eine ideale feste Einspannung realisiert werden. Die realen Randbedingungen weichen immer von den Modellvorstellungen ab. Es gibt daher in der Literatur zahlreiche Ansätze, bei denen dem Modell an den Rändern der Platte Federn und Dämpfer hinzugefügt werden [7, 11, 31, 32]. Abgesehen von der hohen Komplexität eines Ansatzes mit dissipativen Elementen an den Rändern der Platte haben Berechnungen der STI aus Prüfstandsmessungen gezeigt, dass die Dissipation an den Rändern für die Beschreibung dieses Prüfstandes vernachlässigt werden kann. Um das Modell der Platte an die tatsächlichen Randbedingungen (unter Vernachlässigung der Dämpfung) anzupassen, wird im Folgenden ein Ansatz mit gemischten Eigenformen verwendet. Ein ähnliches Konzept wurde 1984 von WARBURTON und EDNEY [83] vorgestellt. Es wird eine Methode basierend auf RAYLEIGH-RITZ-Ansätzen beschrieben, mit der die Eigenfrequenzen von Platten mit Hilfe gemischter Eigenformen verschiedener Randbedingungen berechnet werden.

Diese Idee wird von Bartylla [4] aufgegriffen und erweitert, indem die gemischten Eigenformen mit Hilfe einer Verteilungsfunktion L aus den Eigenformen der fest eingespannten Platte und der gelenkig gelagerten Platte berechnet werden

$$\phi_{mn} = \phi_{mn, \text{gemischt}} = (1 - L)\phi_{mn, \text{gelenkig gelagert}} + L\phi_{mn, \text{fest eingespannt}} , \quad (2.17)$$

$$L = 1 - e^{-\left(\frac{k_{\text{rot}}}{k_{\text{ref}}}\right)} . \quad (2.18)$$

Die Verteilungsfunktion L wird über die e -Funktion und die rotatorische Randsteifigkeit k_{rot} , die für alle Ränder als identisch angenommen wird, definiert. Der Parameter k_{ref} legt die Steigung der Kurve von L im Ursprung fest. Für $k_{\text{ref}} \rightarrow 0$ geht die Verteilungsfunktion L gegen 0, die gemischte Eigenform $\phi_{mn, \text{gemischt}}$ entspricht der der gelenkig gelagerten Platte $\phi_{mn, \text{gelenkig gelagert}}$. Für $k_{\text{ref}} \rightarrow \infty$ gilt $L \rightarrow 1$, und die gemischte Eigenform $\phi_{mn, \text{gemischt}}$ nähert sich der festen Einspannung $\phi_{mn, \text{fest eingespannt}}$. Die Abbildung 2.1 zeigt die Verteilungsfunktion L aufgetragen über dem Verhältnis $k_{\text{rot}}/k_{\text{ref}}$.

Im Experiment wurde in dieser Arbeit meist die fest eingespannte Platte untersucht. Um das Modell an das Experiment anzupassen, wurde ein Verhältnis von $k_{\text{rot}}/k_{\text{ref}} = 1$ gewählt. Damit ergibt sich für die Verteilungsfunktion L nach Gleichung (2.18) der Wert 0,62. Das bedeutet, dass sich die Eigenform der vermeintlich festen Einspannung nach Gleichung (2.17) zu 38 % aus der gelenkigen Lagerung und zu 62 % aus der festen Einspannung zusammensetzt.

Analog zu Gleichung (2.17) kann eine lineare Verteilung der Eigenfrequenzen angenommen werden.

$$\omega_{mn} = \omega_{mn, \text{gemischt}} = (1 - L)\omega_{mn, \text{gelenkig gelagert}} + L\omega_{mn, \text{fest eingespannt}} . \quad (2.19)$$

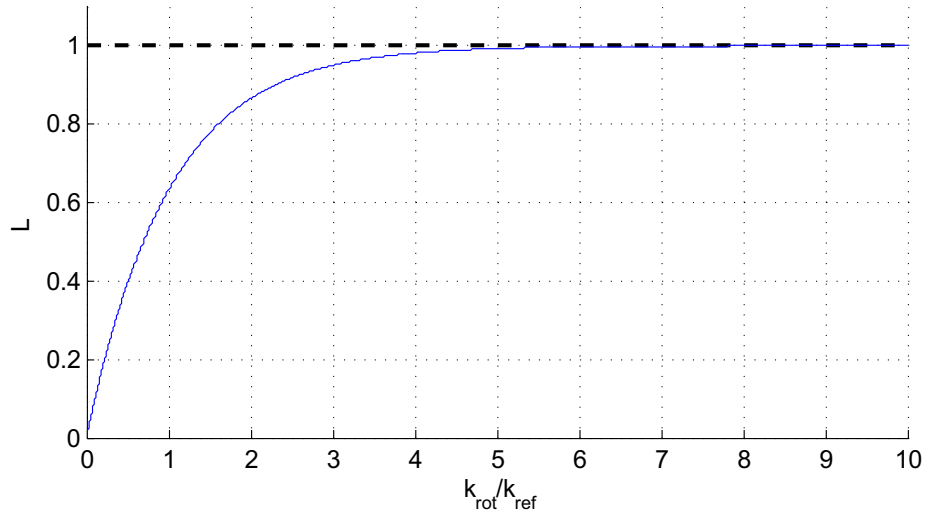


Abbildung 2.1: Verteilungsfunktion L

Zum Vergleich werden mit Hilfe des Rayleigh-Quotienten (modaler Ansatz) durch Einsetzen der Eigenformen aus Gleichung (2.17) ebenfalls die Eigenfrequenzen berechnet

$$\omega_{mn}^2 = \frac{k_{mn}}{m_{mn}} = \frac{\int_A K[\phi_{mn}] \phi_{mn} dA}{\rho h \int_A \phi_{mn} \phi_{mn} dA} . \quad (2.20)$$

In Abbildung 2.2 werden die Ergebnisse beider Methoden für die erste Eigenfrequenz miteinander verglichen.

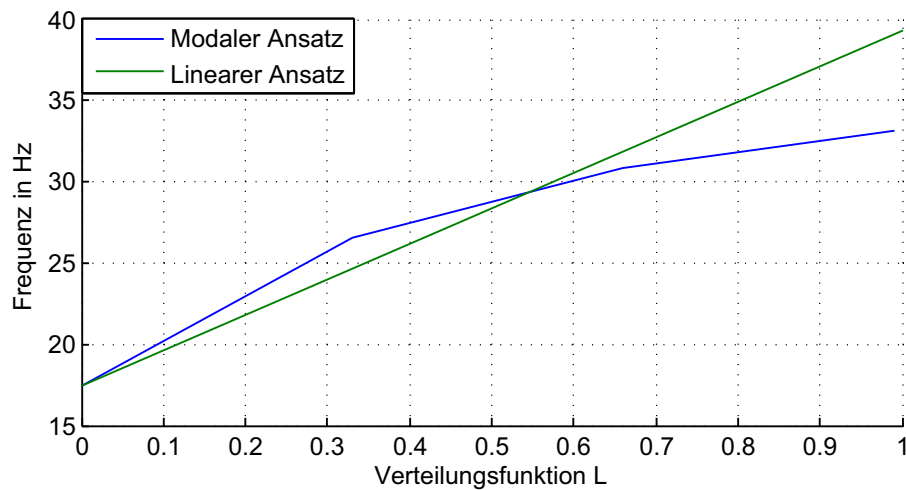


Abbildung 2.2: Vergleich der Berechnungsverfahren am Beispiel der ersten Eigenfrequenz

Aus Abbildung 2.2 wird deutlich, dass die Verteilung der Eigenfrequenzen, die mit dem modalen Ansatz berechnet wurden, nichtlinear ist. Demnach konvergiert die Eigenfrequenz aus dem linearen Ansatz nicht gegen die Eigenfrequenz der fest eingespannten Platte. Da die Berechnungsmethode der Eigenfrequenzen nur deren Lage im Frequenzspektrum beeinflusst, wurde für die Simulation auf den linearen

Ansatz zurückgegriffen. Der hierdurch entstehende Fehler ist sehr gering. Nach dem Abgleich des Modells mit dem Experiment ergibt sich für die feste Einspannung die Verteilungsfunktion $L = 0,62$. Die Ergebnisse beider Ansätze unterscheiden sich daher kaum, was in Abbildung 2.2 am Beispiel der ersten Eigenfrequenz verdeutlicht wird. Für die gelenkige Lagerung ($L = 0$) stimmen die Ergebnisse beider Ansätze überein. Einen wesentlichen Einfluss auf das Berechnungsergebnis hat die modale Masse, da diese direkt den Faktor C_{mn} und damit die Amplitude der Mode beeinflusst (vergleiche Gleichungen (2.14) und (2.16)). Daher wurde die modale Masse für den verwendeten Wert der Verteilungsfunktion L mit den Gleichungen (2.12) und (2.17) berechnet und in der Matlab-Simulation als Look-up-table hinterlegt. Da die beschriebene Berechnung der modalen Massen sehr viel Rechenzeit beansprucht, kann die modale Masse alternativ mit einem Polynom zweiter Ordnung berechnet werden, das die Verteilung der modalen Masse in Abhängigkeit von der Funktion L beschreibt

$$M_{\text{mod}} = \rho h a b \left(0,332 L^2 + 0,418 L + 0,25 \right) . \quad (2.21)$$

Diese Methode erlaubt eine sehr schnelle Berechnung der modalen Masse, wenn innerhalb kurzer Zeit die Auswirkung einer alternativen Einspannung auf die Verschiebung berechnet werden muss oder wenn für eine Rechnung sehr viele Moden berücksichtigt werden.

2.3 Modellierung eines piezoelektrischen Plattenaktors

Da in adaptiven Systemen häufig piezokeramische Plattenaktoren (Piezopatches) verwendet werden, wird in diesem Abschnitt dem analytischen Modell ein Piezopatch als Möglichkeit der Kraftanregung hinzugefügt. Ausgehend von den Grundgleichungen piezokeramischer Werkstoffe wird ein Weg aufgezeigt, wie die an der Platte angreifenden Kräfte des Piezopatches mathematisch beschrieben und in das analytische Plattenmodell integriert werden können.

Legt man eine Spannung an ein piezoelektrisches Material an, so kommt es in Abhängigkeit von der Polarisierung zu mechanischen Verschiebungen. Dieses Prinzip wird von Aktuatoren genutzt (Gleichung (2.22)). Wirken hingegen mechanische Spannungen von außen auf die Piezokeramik ein, so entsteht durch die damit verbundenen Verzerrungen ein elektrisches Feld, durch das eine elektrische Spannung erzeugt wird. Sensoren arbeiten mit Hilfe des direkten piezoelektrischen Effektes (Gleichung (2.23)). Die im Folgenden angegebenen Grundgleichungen für Piezoelemente [8] sind nur für kleine elektrische und mechanische Amplituden gültig, was aber für maschinenakustische Fragestellungen keine Einschränkung bedeutet.

$$S = s^E T + d E , \quad (2.22)$$

$$D = d T + \epsilon^T E . \quad (2.23)$$

In den Gleichungen (2.22) und (2.23) ist S der Vektor der mechanischen Dehnungen, D der Vektor der elektrischen Flussdichte, T der Vektor der mechanischen Spannungen, E der Vektor der elektrischen

Feldstärke, s^E die Matrix der Elastizitätskonstanten bei konstantem elektrischem Feld, d die Matrix der piezoelektrischen Konstanten und ϵ^T die Matrix der Permittivität bei konstanter mechanischer Spannung. Die Matrix ϵ^T ist ebenso ein Maß für die Polarisierbarkeit im elektrischen Feld. Die Matrix d ist ein Maß für die induzierte Ladung bei mechanischer Spannung oder Dehnung bei der Wirkung eines elektrischen Feldes. Die Matrizen s und ϵ hängen also von den mechanischen und elektrischen Randbedingungen des Systems ab. Mit den Indizes '1', '2', '3' die die Koordinatenrichtungen x, y, z beschreiben, wird das gekoppelte Gleichungssystem (2.22) (2.23) ausgeschrieben. Ist der beschriebene Aktor in z -Richtung polarisiert, führt dies auf das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{23} \\ S_{13} \\ S_{12} \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} s_{11}^E & s_{12}^E & s_{13}^E & & & \\ s_{12}^E & s_{11}^E & s_{23}^E & & & \\ s_{13}^E & s_{23}^E & s_{33}^E & & & \\ & & & s_{44}^E & & \\ & & & & s_{44}^E & \\ & & & & & 2(s_{11}^E - s_{12}^E) \\ \hline & & & & & \\ & & & d_{15} & & \\ & & & & d_{15} & \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & & & \end{array} \right] \cdot \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

Piezokeramische Plattenaktoren sind in der 1,2-Ebene isotrop, was sich in Gleichung (2.24) durch eine symmetrische Nachgiebigkeitsmatrix s^E äußert. Darüber hinaus wird deutlich, dass ein elektrisches Feld E_3 identische Verschiebungen in 1- und 2- Richtung bewirkt, da $d_{31} = d_{32}$ ist.

Um die Kraft F , die aus einer angelegten elektrischen Spannung U resultiert, zu berechnen, muss zuerst die Dehnung des piezokeramischen Aktors, die aus dem elektrischen Feld resultiert, bestimmt werden

$$S_1 = d_{31} E_3 \quad (2.25)$$

Setzt man Gleichung (2.25) in das Hookesche Gesetz

$$T_1 = E_p S_1 \quad (2.26)$$

mit dem E-Modul des piezoelektrischen Materials E_p ein, berechnet sich die aus dem äußeren elektrischen Feld resultierende mechanische Spannung bezogen auf die Dicke des Piezopatches h_p zu

$$T_1 = E_p d_{31} E_3 = E_p d_{31} \frac{U(t)}{h_p} \quad (2.27)$$

Um die relative Kraft pro Längeneinheit zu erhalten, muss die Gleichung (2.27) mit der Dicke des Piezopatches h_p multipliziert werden, was auf die Kraft N pro Längeneinheit führt

$$N = E_p d_{31} U(t). \quad (2.28)$$

Das in die Platte eingeleitete Moment M pro Längeneinheit kann berechnet werden, indem die Kraft N mit der halben Höhe des piezokeramischen Aktors (h_p) und dem Abstand von der Mittelebene der Platte $h/2$ multipliziert wird. Die Dicke der Klebschicht kann hierbei vernachlässigt werden.

$$M = E_p d_{31} U(t) \frac{h + h_p}{2} \quad (2.29)$$

Die Kräfte und Momente, die aufgrund der Dehnung des Piezopatches bei angelegter Spannung wirken, werden durch Schubspannungen vom Piezopatch über die Klebeschicht auf die Platte übertragen. Da diese Schubspannungen proportional zur Dehnung des Aktors sind und die Dehnung am Rand des Aktors maximal ist, ist hier auch die Schubspannung maximal. Die grundlegenden Analysen der Spannungsverläufe von Klebeverbindungen gehen auf VOLKERSEN [81, 82] zurück. Eine mathematische Beschreibung des Schubspannungsverlaufs in Klebeschichten

$$\frac{\tau}{\tau_m} = \frac{\rho}{2} \left[\frac{\cosh(\rho x/l)}{\sinh(\rho/2)} - \frac{(1 - \psi) \sinh(\rho x/l)}{(1 + \psi) \cosh(\rho/2)} \right] \quad (2.30)$$

wird von SCHÜRMANN [64] abgeleitet. In Gleichung (2.30) ist τ_m die mittlere Schubspannung, l die Länge des Piezopatches und $\psi = E_{\text{Piezopatch}} h_p / E_{\text{Platte}} h$ das Steifigkeitsverhältnis von Piezopatch und Platte. Der E-Modul der Platte und die Dicke der Platte werden mit E_{Platte} und h bezeichnet, der E-Modul und die Dicke des Piezopatches entsprechend mit $E_{\text{Piezopatch}}$ und h_p . $\rho^2 = (1 + \psi) G_K l^2 / E_{\text{Piezopatch}} h_p h_K$ ist die Klebungskennzahl der Verbindung mit dem Schubmodul des Klebers G_K und der Dicke der Klebschicht h_K . Nach dieser Gleichung treten Schubspannungsüberhöhungen an den Rändern der Klebeschicht auf und bestätigen die oben getroffene Annahme. Die Abbildung 2.3 visualisiert den Verlauf der Normalspannungen σ und der Schubspannungen τ .

Werden die Verschiebungen und Kräfte in der Plattenmittelebene (in-plane) vernachlässigt, kann ein piezoelektrischer Plattenaktor mit Momenten, die an dessen Kanten auf die Platte wirken, beschrieben werden. Die Momente M_{px} und M_{py} in x - und y -Richtung sind für piezokeramische Plattenaktoren gleich, da die piezoelektrischen Konstanten d_{31} und d_{32} gleich sind. Unter Verwendung der Heavisidefunktion H können die auf die Platte wirkenden Momente

$$M_{px} = -E_p d_{31} U(t) \frac{h_p + h}{2} [H(x - x_1) - H(x - x_2)] \times [H(y - y_1) - H(y - y_2)] \quad (2.31)$$

und

$$M_{py} = -E_p d_{31} U(t) \frac{h_p + h}{2} [H(y - y_1) - H(y - y_2)] \times [H(x - x_1) - H(x - x_2)] \quad (2.32)$$

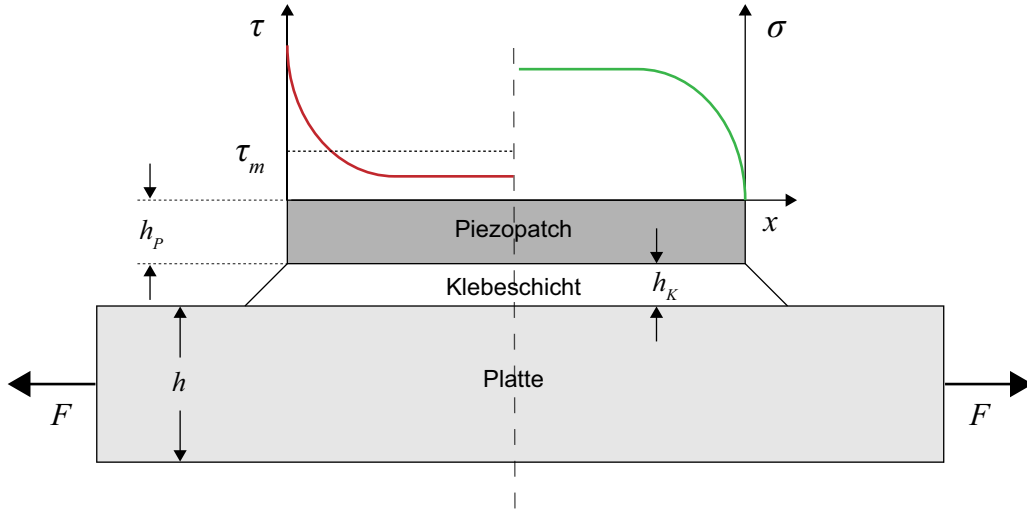


Abbildung 2.3: Verteilung der Schubspannungen τ und der Normalspannung σ in der Klebeschicht zwischen Piezopatch und Platte

als Linienmomente beschrieben werden [87]. E_p bezeichnet den E-Modul des piezoelektrischen Materials, $U(t)$ die am Piezopatch angelegte elektrische Spannung und h_p die Höhe des Piezopatches. Die Dicke der Klebeschicht kann vernachlässigt werden. Mit der Heavisidefunktion und ihren Ableitungen können die durch den Piezopatch eingeleiteten Momente als Kräfte ausgedrückt werden [87]. Die Heavisidefunktion ist definiert als

$$H(x - a) = \begin{cases} 0 & x < a, \\ \frac{1}{2} & x = a, \\ 1 & x > a. \end{cases} \quad (2.33)$$

Die Ableitung der Heavisidefunktion H' ist definiert als die Diracfunktion

$$H'(x - a) = \delta(x - a). \quad (2.34)$$

Da die Momente nur in Form von Druckkräften $q(x, y, t)$ in die Bewegungsgleichung der Platte (2.1) eingefügt werden können, müssen die an der Platte angreifenden Momente aus Gleichungen (2.31) und (2.32) zweimal nach dem Ort abgeleitet werden. Mit den Koordinaten der Eckpunkte des Piezopatches x_1, x_2, y_1 und y_2 ergeben sich die Ableitungen der Momente zu [87]

$$\frac{\partial^2 M_{px}}{\partial x^2} = -E_p d_{31} U(t) \frac{h_p + h}{2} [\delta'(x - x_1) - \delta'(x - x_2)] \times [H(y - y_1) - H(y - y_2)] \quad (2.35)$$

und

$$\frac{\partial^2 M_{py}}{\partial y^2} = -E_p d_{31} U(t) \frac{h_p + h}{2} [\delta'(y - y_1) - \delta'(y - y_2)] \times [H(x - x_1) - H(x - x_2)] . \quad (2.36)$$

Durch Summation von (2.35) und (2.36) erhält man die auf die Platte wirkende Kraft

$$p(x, y, t) = \frac{\partial^2 M_{px}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{py}}{\partial y^2} . \quad (2.37)$$

Die Wirkung der zweifachen Ableitung von zwei Heavisidefunktionen, also der Ableitung der Diracfunktion, wird qualitativ in Abbildung 2.4 gezeigt. Die zweifache Ableitung der Heavisidefunktionen führt zu Punktmomenten an den Stellen x_1 und x_2 .

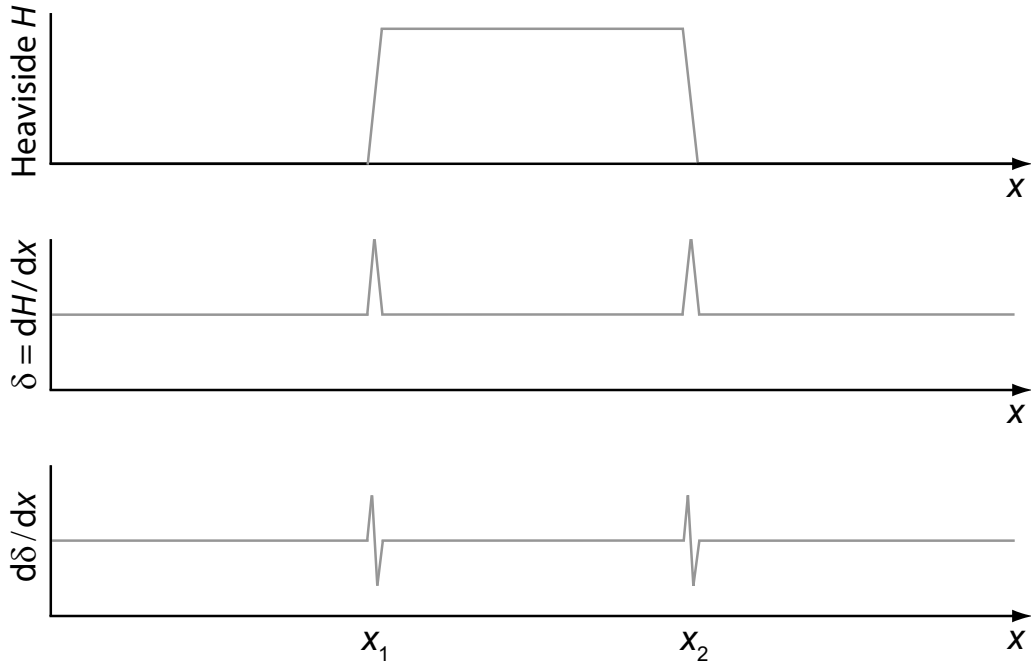


Abbildung 2.4: Ableitungen der Heavisidefunktion H (qualitative Darstellung)

Die Gleichung (2.37) wird über die Plattenfläche integriert, mit den Eigenformen ϕ_{mn} multipliziert und es ergibt sich mit der am Piezopatch angelegten Spannung $U(t) = \hat{U}e^{i\Omega t}$

$$p(x, y, t) = \int_A \left[\frac{\partial^2 M_{px}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{py}}{\partial y^2} \right] \phi_{mn}(x, y) dA e^{i\Omega t} = P_{mn} e^{i\Omega t} . \quad (2.38)$$

Das Integral in Gleichung (2.38) kann mit partieller Integration berechnet werden [87]. Mit den Eigenfrequenzen des gedämpften Systems (2.15) und der Kraft $p(x, y, t)$, die durch den Piezopatch in die Platte eingeleitet wird, ergeben sich aus Gleichungen (2.14) und (2.38) die Entwicklungskoeffizienten C_{mn} zu

$$C_{mn} = \frac{1}{M} \frac{\hat{F} \phi_{mn}(x^*, y^*) - P_{mn}}{(\omega_{mn}^2 (1 + i\xi) + s^2)} . \quad (2.39)$$

Damit kann die Verschiebung der gedämpften Platte mit punktförmiger, harmonischer Kraftanregung und Piezopatch im Frequenzbereich berechnet werden

$$w(x, y, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{M} \frac{\hat{F} \cdot \phi_{mn}(x^*, y^*) - P_{mn}}{(\omega_{mn}^2 (1 + i\xi) - \Omega^2)} \phi_{mn}(x, y) e^{i\Omega t} . \quad (2.40)$$

Um eine effektive Berechnung der Verschiebung in Matlab/Simulink zu ermöglichen, wird die Bewegungsgleichung der Platte vorab in die Zustandsraumdarstellung überführt. Für manche Matlab-Modelle wird an Stelle der Zustandsraumdarstellung die Übertragungsfunktion des Plattenmodells verwendet. Beide Umrechnungen sind im Anhang A.2 zu finden.

3 Mathematische Beschreibung der Strukturintensität (STI)

In diesem Kapitel wird, ausgehend vom ersten Hauptsatz der Thermodynamik, eine Formulierung der STI mit Geschwindigkeits- und Verschiebungsgrößen für die KIRCHHOFF-Platte hergeleitet. Es wird auf den Einfluss der Dämpfung auf die STI und auf die Wirbelbildung im STI-Verlauf eingegangen sowie ein Zusammenhang zwischen der STI und Energiegrößen hergestellt.

3.1 Energiebilanz für ein Kontrollvolumen

Um den Leistungsfluss in Strukturen und in der hier betrachteten Platte quantifizieren zu können, wird die Strukturintensität \mathbf{I} mit Hilfe einer Energiebilanz für ein Kontrollvolumen dV definiert. Nach Anwendung des ersten Hauptsatzes der Thermodynamik auf ein Kontrollvolumen dV und Summation der relevanten Beiträge (die Verluste durch Luftreibung und Schallabstrahlung können vernachlässigt werden) ergibt sich

$$\int_V \frac{de}{dt} dV + \int_A \mathbf{I} \cdot \mathbf{n} dA + P_{\text{diss}} = P_{\text{zu}}, \quad (3.1)$$

mit der zeitlichen Änderung der Energiedichte $\frac{de}{dt}$, dem Leistungsfluss durch die Begrenzung des Kontrollvolumens $\int_A \mathbf{I} \cdot \mathbf{n} dA$, der zugeführten Leistung P_{zu} und der dissipierten Leistung P_{diss} . Der Vektor \mathbf{n} ist der senkrecht zur Begrenzung des Kontrollvolumens stehende Normalenvektor. Für stationäre Vorgänge (harmonische Anregung) wird das erste Integral 0. Das zweite Integral kann mit dem Satz von Gauß [63] in ein Volumenintegral überführt werden:

$$\int_A \mathbf{I} \cdot \mathbf{n} dA = \int_V \nabla \cdot \mathbf{I} dV. \quad (3.2)$$

Betrachtet wird ein Kontrollvolumen ohne zugeführte Leistung ($P_{\text{zu}} = 0$). Die dissipierte Leistung kann unter Verwendung der Leistungsdichte p_{diss} als $P_{\text{diss}} = \int_V p_{\text{diss}} dV$ ausgedrückt werden. Somit berechnet sich für $dV \rightarrow 0$ durch die Anwendung der Transformation (3.2) die dissipierte Leistung aus Gleichung (3.1) zu

$$p_{\text{diss}} = -\nabla \cdot \mathbf{I}. \quad (3.3)$$

Gleichung (3.3) besagt, dass in einem Kontrollvolumen ohne zugeführte Leistung die dissipierte Leistung p_{diss} gleich der negativen Divergenz (d. h. Änderung) der Strukturintensität \mathbf{I} ist. Solange nur eine Kraft an der Platte angreift, stellt sich demnach nur dann ein Leistungsfluss ein, wenn Energie dissipiert wird. Nach dem Aufstellen der Energiebilanz für ein Kontrollvolumen wird der Leistungsfluss, d. h. die Strukturintensität \mathbf{I} , im Folgenden näher untersucht.

3.2 Berechnung der Strukturintensität aus Verschiebungsgrößen

Die Luftschallintensität ist als Produkt des Schalldrucks p und der Schnelle \mathbf{v} definiert

$$\mathbf{I} = p\mathbf{v}. \quad (3.4)$$

Analog zur Luftschallintensität wird die STI als das Produkt aus Spannungstensor $\mathbf{S} = \sigma_{ij}$ und Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v} = v_i$ mit $i, j = x, y, z$ definiert. Es ergibt sich

$$\mathbf{I} = -\mathbf{S}\mathbf{v}. \quad (3.5)$$

Die Indizes $i, j = x, y, z$ bezeichnen die Koordinatenrichtungen x , y und z . Das Minuszeichen in Gleichung (3.5) wird eingeführt, weil Druckspannungen in der Mechanik gewöhnlich ein negatives Vorzeichen haben. Aufgrund dieser Schreibweise deutet ein positiver STI-Vektor auch in die positive Koordinatenrichtung. Ausgeschrieben lauten die Komponenten der STI [9]:

$$I_x = - \left[\overline{\sigma_{xx} v_x} + \overline{\sigma_{xy} v_y} + \overline{\sigma_{xz} v_z} \right] \quad (3.6)$$

$$I_y = - \left[\overline{\sigma_{xy} v_x} + \overline{\sigma_{yy} v_y} + \overline{\sigma_{yz} v_z} \right] \quad (3.7)$$

$$I_z = - \left[\overline{\sigma_{xz} v_x} + \overline{\sigma_{yz} v_y} + \overline{\sigma_{zz} v_z} \right], \quad (3.8)$$

wobei die zeitliche Mittelung durch Überstreichung gekennzeichnet wird. Bei dünnwandigen Strukturen kann die STI in Dickenrichtung vernachlässigt werden [25]. Da im Folgenden ausschließlich dünne Platten untersucht werden, wird der Leistungsfluss in z -Richtung (senkrecht zur Mittelebene) vernachlässigt. Einen Überblick über die im Folgenden verwendeten Verschiebungsrichtungen gibt Abbildung 3.1.

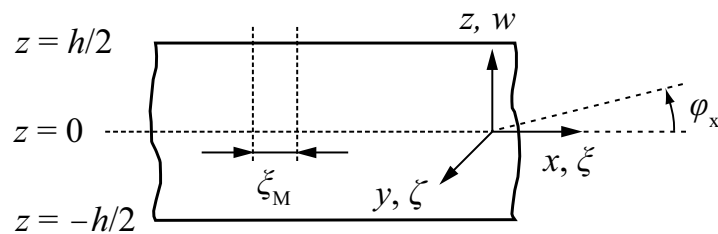


Abbildung 3.1: Definition der Verschiebungsrichtungen und Winkel

In isotropen Platten können die Spannungen aus den Verschiebungen in der Plattenmittelebene ξ_m , ζ_m und w in x -, y - und z -Richtung berechnet werden [20]. Mit dem Schubmodul G und dem Elastizitätsmodul E ergeben sich aus den verschiedenen Ortsableitungen die Spannungen

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial \xi_M}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \zeta_M}{\partial y} + \nu z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right), \quad (3.9)$$

$$\sigma_{xy} = G \left(\frac{\partial \xi_M}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_M}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right), \quad (3.10)$$

$$\sigma_{xz} = G \left(\varphi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad (3.11)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\nu \frac{\partial \xi_M}{\partial x} + \nu z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_M}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right), \quad (3.12)$$

$$\sigma_{yz} = G \left(\varphi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right). \quad (3.13)$$

Für dünne Platten können die Winkel φ_x und φ_y geschrieben werden als [9]

$$\varphi_x = \frac{\delta w}{\delta x} \quad \text{und} \quad \varphi_y = \frac{\delta w}{\delta y}. \quad (3.14)$$

Die Geschwindigkeiten werden aus den Verschiebungen durch Ableiten nach der Zeit berechnet:

$$v_x = \dot{\xi}_M + z \dot{\varphi}_x, \quad (3.15)$$

$$v_y = \dot{\zeta}_M + z \dot{\varphi}_y, \quad (3.16)$$

$$v_z = \dot{w}. \quad (3.17)$$

Durch Einsetzen der Gleichungen (3.9) bis (3.17) in Gleichung (3.6) wird die x -Komponente der STI in der x - y -Ebene mit dem Abstand z von der Mittelebene berechnet. Es ergibt sich für die x -Richtung der STI

$$\begin{aligned} -I_x = & \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial \xi_M}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \zeta_M}{\partial y} + \nu z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right) (\dot{\xi}_M + z \dot{\varphi}_x) \\ & + G \left[\left(\varphi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \dot{w} + \left(\frac{\partial \xi_M}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_M}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) (\dot{\zeta}_M + z \dot{\varphi}_y) \right]. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Die weiteren Komponenten können analog aus Gleichungen (3.7) und (3.8) bestimmt werden. Da meist der über die Dicke gemittelte Intensitätsfluss von Interesse ist, wird die STI-Komponente I_x über die Plattendicke integriert, und es ergibt sich

$$I'_x = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} I_x dz. \quad (3.19)$$

Wird Gleichung (3.18) in die Integralgleichung (3.19) eingesetzt, muss der Ausdruck $G\left(\varphi_x + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\dot{w}$ umgeschrieben werden, da er von der Form $\infty \cdot 0$ ist. Die Gleichung wird umgerechnet [9], und es folgt

$$G\left(\varphi_x + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\dot{w} = \frac{1}{h} \int \sigma_{xz} \dot{w} \, dz = -\frac{\dot{w}}{h} \int \sigma_{xz} \, dz = -\frac{1}{h} \dot{w} Q_x = -\frac{B}{h} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \dot{w}. \quad (3.20)$$

Damit berechnet sich die mittlere STI in x -Richtung aus dem Integral (3.19) zu [9]

$$\begin{aligned} -I'_x = & \frac{E}{1-\nu^2} \overline{\left(\frac{\partial \xi_M}{\partial x} + \nu \frac{\partial \zeta_M}{\partial y} \right) \dot{\xi}_M} + G \overline{\left(\frac{\partial \xi_M}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_M}{\partial x} \right) \dot{\zeta}_M} \\ & + \frac{B}{h} \left[\overline{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{\partial \dot{w}}{\partial x}} + (1-\nu) \overline{\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial \dot{w}}{\partial y}} - \overline{\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \dot{w}} \right]. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Diese Gleichung kann auch mit den inneren Kräften, Momenten und Geschwindigkeiten, wie sie z. B. in der FE-Simulation verwendet werden, ausgedrückt werden, und man erhält die Form [18]

$$-I'_x h = \underbrace{\overline{N_x \dot{\xi}} + \overline{N_{xy} \dot{\zeta}}}_{\text{STI aus Longitudinalwellen (in-plane-Anteil)}} + \underbrace{\overline{M_x \dot{\varphi}_x} - \overline{M_{xy} \dot{\varphi}_y} + \overline{Q_x \dot{w}}}_{\text{STI aus Transversalwellen (out-of-plane-Anteil)}}. \quad (3.22)$$

Die ersten beiden Terme in den Gleichungen (3.21) und (3.22) beschreiben den Anteil der Longitudinalwellen am Gesamtleistungsfluss, der sich aus der Längskraft N_x und der Geschwindigkeit in x -Richtung $\dot{\xi}$ sowie der Schubkraft N_{xy} und der Geschwindigkeit in y -Richtung $\dot{\zeta}$ berechnet. Die einzelnen Terme des Longitudinal- und Biegewellenanteils der STI (siehe Gleichung (3.22)) ermöglichen eine differenzierte Interpretation des Leistungsflusses in Strukturen. Je nachdem, welcher Anteil der STI den Leistungsfluss überwiegend beeinflusst, können entsprechende passive Maßnahmen (z. B. Versteifung, Dickenänderung, ...) oder aktive Maßnahmen (z. B. Piezopatch, Piezo-Stackaktor, ...) ergriffen werden, um die STI und damit letztendlich die Schallabstrahlung zu beeinflussen.

Die Anteile der Longitudinalwellen am Gesamtleistungsfluss werden im Folgenden vernachlässigt, da in der modellierten KIRCHHOFF-Platte nur Biegewellen angeregt werden. Ein weiterer Grund ist, dass die Longitudinalwellen nicht mit dem 2D-Laser-Scanningvibrometer gemessen werden können. Eine Validierung der numerischen Simulationsergebnisse im Versuch ist demnach nicht möglich.

Der Biegewellenanteil der STI berechnet sich aus dem Biegemoment M_x und der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_x$, dem Torsionsmoment M_{xy} und der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_y$ sowie der Querkraft Q_x und der Geschwindigkeit in z -Richtung \dot{w} . Damit ergibt sich der aus dem Biegewellenanteil berechnete Ausdruck der STI für die KIRCHHOFF-Platte in x - und y -Richtung, der für die Untersuchungen verwendet wird zu

$$I'_x = -\frac{B}{h} \left[\overline{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{\partial \dot{w}}{\partial x}} + (1-\nu) \overline{\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial \dot{w}}{\partial y}} - \overline{\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \dot{w}} \right] \quad (3.23)$$

und

$$I'_y = -\frac{B}{h} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} + (1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \dot{w} \right] . \quad (3.24)$$

Bei harmonischer Anregung befindet sich die Platte nach dem Abklingen der homogenen Lösung in einem stationären Zustand und schwingt mit der Frequenz der Anregung. Die sich daraus ergebenden Besonderheiten für Energie- und Leistungsgrößen werden am Beispiel der zugeführten Leistung P_{zu} abgeleitet. Die zugeführte Leistung kann definiert werden als

$$P_{zu} = F v = \operatorname{Re}\{\underline{F} e^{i\omega t}\} \operatorname{Re}\{\underline{v} e^{i\omega t}\} \quad (3.25)$$

mit den komplexen Größen $\underline{F} = \hat{F} e^{i\phi}$ und $\underline{v} = \hat{v} e^{i\psi}$. Die Amplitude ist durch ein Dach gekennzeichnet. ϕ und ψ bezeichnen die Phasenwinkel der jeweiligen Größe. Ausgehend von einer cosinusförmigen Anregung ergibt sich für die zugeführte Leistung

$$\begin{aligned} P_{zu} &= \hat{F} \hat{v} \operatorname{Re}\{e^{i\omega t + \phi}\} \operatorname{Re}\{e^{i\omega t + \psi}\} = \hat{F} \hat{v} \cos(\omega t + \phi) \cos(\omega t + \psi) \\ &= \frac{1}{2} \hat{F} \hat{v} [\cos(2\omega t + \phi + \psi) + \cos(\phi - \psi)] . \end{aligned} \quad (3.26)$$

Unter Verwendung von Gleichung (3.26) kann der zeitliche Mittelwert der zugeführten Leistung $\overline{P_{zu}}$ berechnet werden

$$\begin{aligned} \overline{P_{zu}} &= \frac{1}{2} \hat{F} \hat{v} \cos(\phi - \psi) = \frac{1}{2} \hat{F} \hat{v} \operatorname{Re}\{e^{i(\phi - \psi)}\} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{\hat{F} e^{i\phi} \hat{v} e^{-i\psi}\} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{\underline{F} \underline{v}^*\} , \end{aligned} \quad (3.27)$$

wobei konjugiert komplexe Größen durch einen Stern $*$ gekennzeichnet sind. Da $\overline{P_{zu}}$ proportional zum Phasenunterschied zwischen Kraft und Geschwindigkeit $\cos(\phi - \psi) = \cos(\Delta\theta)$ ist, wird der Struktur nur Wirkleistung zugeführt, wenn für den Phasenwinkel $\Delta\theta \neq \frac{2n-1}{2}\pi$ gilt, mit $n \in \mathbb{N}$. Dem System wird demnach nur Wirkleistung zugeführt, wenn der Phasenunterschied zwischen Kraft und Verschiebung der Platte an der Anregungsstelle $\neq 0$ ist, da der Phasenunterschied zwischen Verschiebung und Geschwindigkeit $\frac{\pi}{2}$ beträgt. Analog zu Gleichung (3.27) wird die zeitliche Mittelung der komplexen STI-Komponenten I'_x und I'_y durchgeführt, und es ergibt sich

$$I'_x = -\frac{B}{2h} \left(\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \right)^* + (1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial y} \right)^* - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) (\dot{w})^* \right) \quad (3.28)$$

und

$$I'_y = -\frac{B}{2h} \left(\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial y} \right)^* + (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \right)^* - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) (\dot{w})^* \right). \quad (3.29)$$

Der Realteil der Strukturintensität $\text{Re}\{I\}$ wird als aktiver Anteil bezeichnet und beschreibt den Wirkleistungsfluss in der Struktur (Abbildung 3.2 oben). Der Imaginärteil der Strukturintensität $\text{Im}\{I\}$ wird als reaktiver Anteil bezeichnet. Er beschreibt den lokalen Austausch zwischen kinetischer und potentieller Energie (stehende Welle). Der reaktive Anteil der STI lässt darüber hinaus Rückschlüsse auf die Form der dominierenden Eigenmode zu. In Abbildung 3.2 unten ist beispielsweise der Bauch der in diesem Beispiel angeregten 1-1-Mode deutlich erkennbar.

Bei der analytischen Berechnung der STI spielt die Anzahl der verwendeten Moden zur Berechnung der Verschiebung bei der Lokalisierung von Quellen und Senken eine wichtige Rolle. Der Energiefluss auf der Platte wird bei einer Anzahl von 6 x 6 Moden (in x- und y-Richtung) schon in guter Näherung berechnet, zur exakten Lokalisierung von Quellen (Kräften) und Senken (Dämpfern) sind jedoch mindestens 20 x 20 Moden zur Berechnung notwendig [18, 25]. Die Abbildung 3.2 zeigt den aktiven und reaktiven Anteil der STI für die 1-1-Mode, die Krafteinleitungsstelle (gekennzeichnet mit einem schwarzen Punkt) ist im aktiven Anteil deutlich zu erkennen.

3.3 Einfluss von Dissipation und Dämpfung auf den Energiefluss

In diesem Abschnitt wird der dissipative Term aus Gleichung (3.1) näher untersucht, da in Gleichung (3.27) gezeigt werden konnte, dass ein Phasenunterschied $\Delta\theta$ zwischen Anregungskraft und Verschiebung vorhanden sein muss, damit ein Wirkleistungsfluss in der Struktur hervorgerufen wird. Aus der Lösung für die Verschiebung der gedämpften Platte (Gleichung (2.16) auf S. 12) wird ersichtlich, dass aufgrund der Dämpfung die Verschiebung komplex wird, was zu einem Phasenwinkel der Verschiebung führt. Um den Zusammenhang zwischen Dämpfung und Phasenwinkel zu zeigen, wird der Nenner des Koeffizienten C_{mn} ausmultipliziert und komplex erweitert [4]. Der Phasenwinkel ϕ der Anregungskraft ist 0.

$$\begin{aligned} C_{mn} &= \frac{1}{M} \frac{\hat{F} \cdot \phi_{mn}(x^*, y^*)}{\left(\omega_{mn}^2 - \Omega^2 + i\omega_{mn}^2 \xi \right)} \cdot \frac{\left(\omega_{mn}^2 - \Omega^2 - i\omega_{mn}^2 \xi \right)}{\left(\omega_{mn}^2 - \Omega^2 - i\omega_{mn}^2 \xi \right)} \\ &= \frac{1}{M} \frac{\hat{F} \cdot \phi_{mn}(x^*, y^*) \left(\omega_{mn}^2 - \Omega^2 \right)}{\left(\omega_{mn}^2 - \Omega^2 \right)^2 + \left(\omega_{mn}^2 \xi \right)^2} - i \frac{1}{M} \frac{\hat{F} \cdot \phi_{mn}(x^*, y^*) \omega_{mn}^2 \xi}{\left(\omega_{mn}^2 - \Omega^2 \right)^2 + \left(\omega_{mn}^2 \xi \right)^2} \\ &= C_{mn,\text{real}} + iC_{mn,\text{imag}} = \sqrt{C_{mn,\text{real}}^2 + C_{mn,\text{imag}}^2} e^{i \arctan\left(\frac{C_{mn,\text{imag}}}{C_{mn,\text{real}}}\right)} = |C_{mn}| e^{i\psi} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Die Gleichung (3.30) verdeutlicht, dass der Imaginärteil des Koeffizienten C_{mn} proportional zum Dämpfungsgrad ξ ist. Demnach sind $C_{mn,\text{imag}} = 0$ und der Phasenwinkel $\psi = 0$, wenn der Dämpfungs-

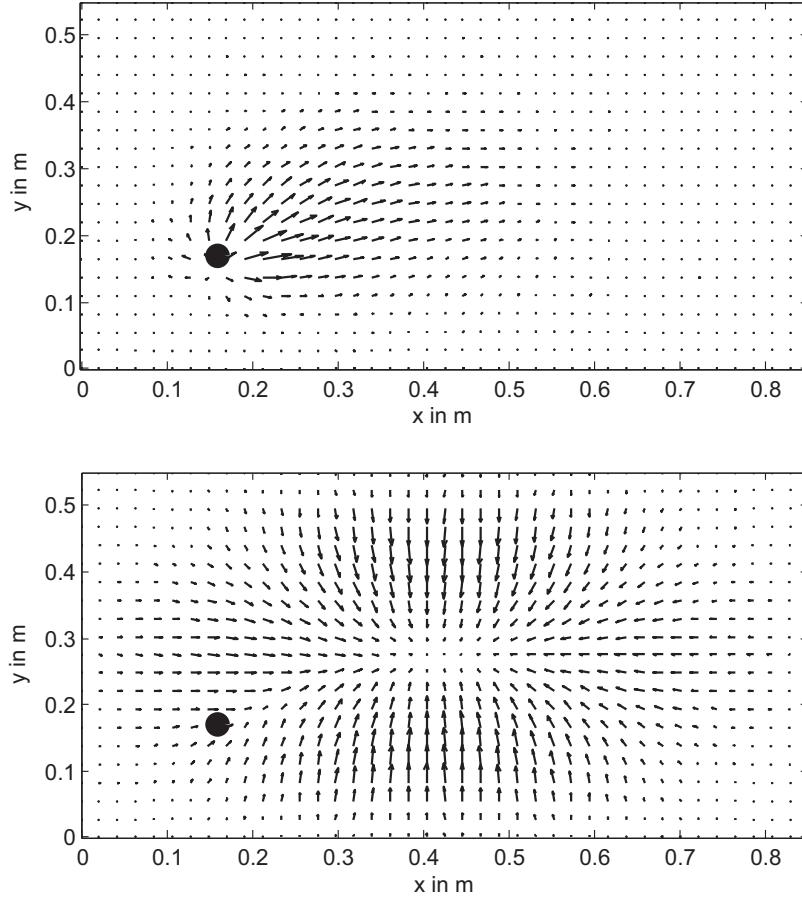


Abbildung 3.2: Aktiver Teil (Realteil, oben) und reaktiver Teil (Imaginärteil, unten) der STI für die 1-1-Mode

$\text{grad } \xi = 0$ ist. In diesem Fall wird im eingeschwungenen Zustand der Platte keine Wirkleistung zugeführt und es gibt auch keinen Wirkleistungsfluss in der Platte. Aus der x -Komponente der STI (3.28) wird deutlich, dass nur dann ein aktiver Anteil der STI existiert, wenn mindestens eine der STI-Komponenten, die Geschwindigkeit oder die Ortsableitung der Verschiebung, komplex ist. Dies wird von BARTYLLA [4] gezeigt, indem zuerst die Geschwindigkeit umgeschrieben wird zu

$$v = i\Omega w = i\Omega (w_{\text{real}} + iw_{\text{imag}}) = \Omega (-w_{\text{imag}} + iw_{\text{real}}) \quad (3.31)$$

und die Ortsableitung als $w_2 = w_{2,\text{real}} + iw_{2,\text{imag}}$ definiert wird. Wird w_2 mit der konjugiert komplexen Geschwindigkeit v^* multipliziert und der Realteil des Produkts

$$\begin{aligned} \text{Re} \{w_2 v^*\} &= \text{Re} \left\{ \Omega (w_{2,\text{real}} + iw_{2,\text{imag}}) (-w_{\text{imag}} + iw_{\text{real}})^* \right\} \\ &= \text{Re} \left\{ \Omega (-w_{\text{imag}} w_{2,\text{real}} + w_{\text{real}} w_{2,\text{imag}} - i (+w_{\text{imag}} w_{2,\text{real}} + w_{\text{real}} w_{2,\text{real}})) \right\} \\ &= \Omega (-w_{\text{imag}} w_{2,\text{real}} + w_{\text{real}} w_{2,\text{imag}}) \end{aligned} \quad (3.32)$$

ausgewertet, ist erkennbar, dass $\text{Re}\{w_2 v^*\} = 0$ ist, wenn beide Imaginärteile 0 sind. Im eingeschwungenen Zustand kann also ein Wirkleistungsfluss durch Dämpfung hervorgerufen werden, wodurch die Verschiebung komplex wird. Eine weitere Möglichkeit ist, zusätzliche Kräfte an der Struktur angreifen zu lassen, wobei sich mindestens zwei Kräfte im Phasenwinkel unterscheiden müssen, damit ein Wirkleistungsfluss auf der Struktur entsteht.

3.4 Verbindung zwischen Leistungsfluss und kinetischer und potentieller Energie

Die Betrachtung der kinetischen und potentiellen Energie in Bezug auf die STI spielt eine wichtige Rolle, da einerseits der Term $\int_V \frac{de}{dt} dV$ aus Gleichung (3.1) bei Berechnungen im Zeitbereich eine wichtige Rolle spielt und andererseits nach PAVIC [54] ein wichtiger Zusammenhang zwischen Energiegrößen und STI hergestellt werden konnte, der in diesem Abschnitt vorgestellt wird.

Die Energiedichte e setzt sich aus der kinetischen Energiedichte e_k und der potentiellen Energiedichte e_p zusammen. Somit ergibt sich für die kinetische Energie T und die potentielle Energie U folgender Zusammenhang.

$$\int_V \frac{de}{dt} dV = \int_V \frac{d}{dt} (e_k + e_p) dV = \frac{d}{dt} (T + U) \quad (3.33)$$

Für isotrope Platten ist die kinetische Energie definiert als [20]

$$\begin{aligned} T &= \iiint_{-h/2}^{h/2} \overbrace{\frac{1}{2} \left[\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + \rho z^2 \left(\left(\frac{\partial w}{\partial x \partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y \partial t} \right)^2 \right) \right]}^{e_k} dz dx dy \\ &= \frac{1}{2} \iint_A \left[\rho h \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + \frac{\rho h^3}{12} \left(\left(\frac{\partial w}{\partial x \partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y \partial t} \right)^2 \right) \right] dx dy. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Die potentielle Energie wird mit Hilfe der linearen Elastizitätstheorie ausgedrückt als [20]

$$\begin{aligned} U &= \iiint_{-h/2}^{h/2} \overbrace{\frac{1}{2} (\sigma_{xx} \epsilon_{xx} + \sigma_{yy} \epsilon_{yy} + 2\sigma_{xy} \epsilon_{xy})}^{e_p} dz dx dy \\ &= \frac{1}{2} \iint_A B \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy. \end{aligned} \quad (3.35)$$

In den Eigenfrequenzen sind kinetische und potentielle Energie gleich, unterhalb der jeweiligen Eigenfrequenz dominiert die potentielle Energie, für Frequenzen größer als die jeweilige Eigenfrequenz dominiert die kinetische Energie (siehe Abbildung 3.3). Da zu höheren Frequenzen hin auch die Modendichte zunimmt, wird dieser Effekt durch Überlagerung von Moden kompensiert, und es kann von einer

Gleichheit von kinetischer und potentieller Energie ausgegangen werden, wie es bei der statistischen Energieanalyse (SEA) getan wird [54]. Liegen reine, sinusförmige Biegewellen vor, ist die Summe aus kinetischer und potentieller Energie und damit der Leistungstransport an jeder Stelle und zu jeder Zeit konstant [9].

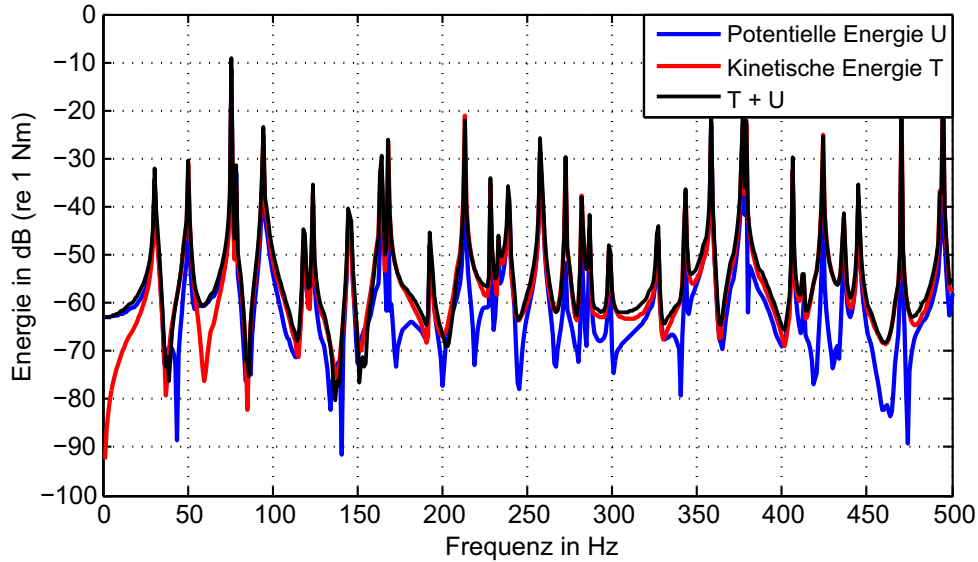


Abbildung 3.3: Potentielle Energie, kinetische Energie und Gesamtenergie einer krafteerregten Platte (Stahl, 850 mm x 550 mm x 1,5 mm, allseitig gelenkige Lagerung)

Eine Verbindung zwischen der kinetischen Energiedichte, der potentiellen Energiedichte und der STI konnte durch Pavic [54] hergestellt werden. Es wurden nur wenige Annahmen getroffen, um die Gültigkeit der Beziehungen nicht einzuschränken. Es wird ein lineares Materialgesetz und ein komplexer Verlustfaktor, analog zu dem in Gleichung (2.15) vorgestellten Dämpfungsgrad ξ , vorausgesetzt. Darüber hinaus werden nur harmonische Schwingungen betrachtet. Ausgehend von der Divergenz der STI

$$\nabla \cdot \mathbf{I} = \frac{\partial I_x}{\partial x} + \frac{\partial I_y}{\partial y} + \frac{\partial I_z}{\partial z} \quad (3.36)$$

und den Energiedichten e_k und e_p , wie sie in den Gleichungen (3.34) und (3.35) definiert wurden, können die Beziehungen

$$\text{Re}(\nabla \cdot \mathbf{I}) = -2\xi\Omega e_p \quad (3.37)$$

und

$$\text{Im}(\nabla \cdot \mathbf{I}) = -2\Omega (e_k - e_p) \quad (3.38)$$

abgeleitet werden. Gleichung (3.37) stellt den Zusammenhang zwischen dem Realteil der Divergenz und der potentiellen Energie her, wohingegen der Imaginärteil der Divergenz proportional zur Differenz von kinetischer und potentieller Energie ist. Des Weiteren wird die Proportionalität beider Gleichungen

zur Anregungsfrequenz Ω deutlich. Mit Hilfe der Divergenz der STI können Quellen und Senken auf einer Struktur visualisiert werden. Die Betrachtung der Divergenz der STI kann sehr hilfreich sein, vor allem bei der Analyse flächiger Bauteile. In Abbildung 3.4 ist die Anregungsstelle auf der Platte mit Hilfe der Divergenz der STI eindeutig zu identifizieren und erscheint als rote Kreisfläche.

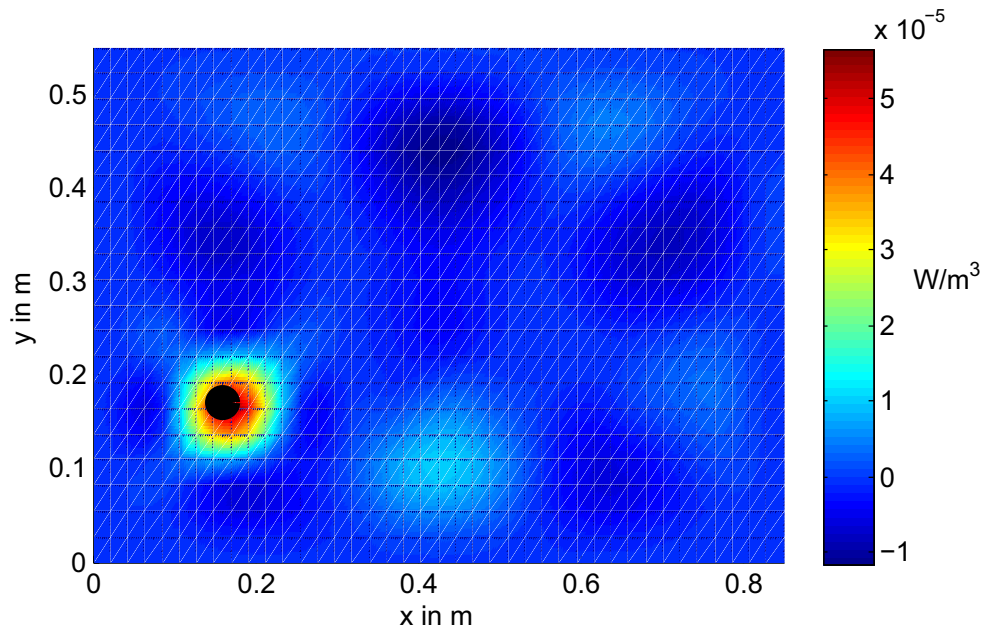


Abbildung 3.4: Divergenz der STI in der 1-2-Mode, die Kraftanregungsstelle ist durch einen schwarzen Punkt gekennzeichnet

3.5 Entstehung von Wirbeln im Leistungsfluss

Betrachtet man den Realteil der STI, fällt auf, dass sich bei einigen Frequenzen charakteristische Wirbel ausbilden. Die Wirbelbildung wurde ausführlich von TANAKA et al. untersucht [73, 74, 75] und der energetische Beitrag verschiedener Moden bei einer bestimmten Frequenz als Haupteinflussfaktor beschrieben. Falls der Energiebeitrag zweier Moden bei einer bestimmten Frequenz annähernd gleich ist und die Mode noch ein bestimmtes Muster aufweist, dann entsteht in der Struktur ein Wirbel, wie in Abbildung 3.5 zu sehen ist.

Der Wirbel in Abbildung 3.5 wird durch die Beiträge der 1-2-Mode und der 3-1-Mode erzeugt, deren Eigenfrequenzen sehr dicht zusammen liegen und sich lediglich um 3 Hz unterscheiden. Bei der Entstehung von Intensitätswirbeln ist dies häufig der Fall, aber nicht zwingend notwendig. Der Einfluss des Modenmusters ist durch die unterschiedliche Bewegungsrichtung der Schwingungsbäuche gegeben. Demnach können Moden in positive und negative Bereiche eingeteilt werden. Überlappen sich die Bereiche verschiedener Moden, bilden sich auf der Struktur Blöcke, die wiederum in vier Bereiche eingeteilt werden können. Bereiche mit jeweils positiven oder negativen Beiträgen der Moden werden mit $(++)$ und $(--)$ gekennzeichnet, die zwei weiteren Bereiche bestehen aus der Mischung der Beiträge der Moden, die mit $(+-)$ und $(-+)$ gekennzeichnet sind. Der Phasenunterschied zwischen den Regionen beträgt jeweils 90° , die Energie fließt also periodisch von einem Bereich in den nächsten. Die Zeit für

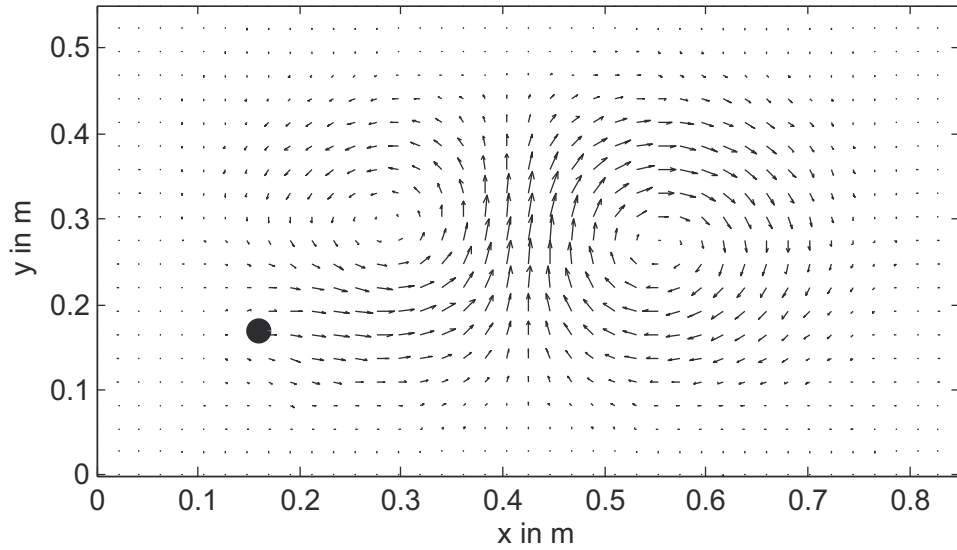


Abbildung 3.5: Intensitätsfluss in der 1-2-Mode, die Anregungsstelle ist durch einen schwarzen Punkt gekennzeichnet

einen Umlauf richtet sich nach der Frequenz. Abbildung 3.6 zeigt den durch Überlagerung entstehenden Block mit den vier beschriebenen Bereichen.

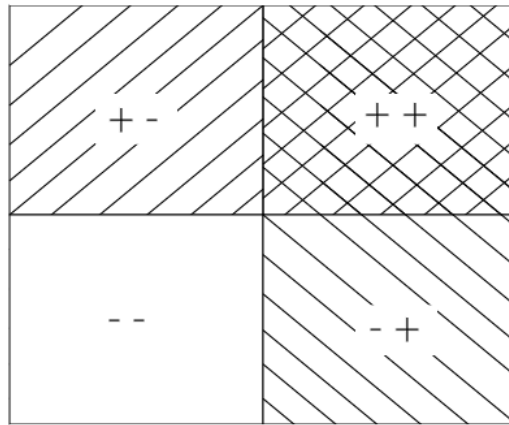


Abbildung 3.6: Wirbelentstehung durch Überlagerung von Verschiebungsbereichen von Moden

Die Stärke der Wirbel kann mit Hilfe der Rotation der STI berechnet werden, und es ergibt sich

$$\nabla \times \mathbf{I} = \frac{\partial I_y}{\partial x} - \frac{\partial I_x}{\partial y} . \quad (3.39)$$

Des Weiteren wird von TANAKA [73] eine Gleichung vorgestellt, mit der die Anzahl an Wirbeln anhand der Halbwellen der Moden in x - und y -Richtung berechnet werden kann. Die Anzahl der Wirbel L bei zwei dominierenden Moden wird berechnet nach

$$L = |m_1 - m_2| \cdot |n_1 - n_2| , \quad (3.40)$$

wobei m_1 und m_2 die Anzahl an Halbwellen in x -Richtung und n_1 und n_2 die Anzahl an Halbwellen in y -Richtung ist.

3.6 Berechnung der STI im Zeitbereich

Im Frequenzbereich wird die STI durch zeitliche Mittelung des Produktes aus Spannungstensor und Geschwindigkeitsvektor berechnet (vgl. Gleichung (3.6) bis (3.8)). Der Momentanwert der STI berechnet sich demnach ohne zeitliche Mittelung der Größen zu

$$I_x(t) = - \left[\sigma_{xx}(t)v_x(t) + \sigma_{xy}(t)v_y(t) + \sigma_{xz}(t)v_z(t) \right] \quad (3.41)$$

$$I_y(t) = - \left[\sigma_{xy}(t)v_x(t) + \sigma_{yy}(t)v_y(t) + \sigma_{yz}(t)v_z(t) \right] \quad (3.42)$$

$$I_z(t) = - \left[\sigma_{xz}(t)v_x(t) + \sigma_{yz}(t)v_y(t) + \sigma_{zz}(t)v_z(t) \right] . \quad (3.43)$$

Da in dieser Arbeit nur Strukturen betrachtet werden, deren Dicke sehr klein im Verhältnis zu den übrigen Abmessungen ist, wird die STI-Komponente in Dickenrichtung $I_z(t)$ bei allen Berechnungen vernachlässigt. Werden die Gleichungen (3.41), (3.42) und (3.43) wie in Abschnitt 3.2 beschrieben umgeformt, erhält man schließlich den Momentanwert der über die Plattendicke gemittelten STI-Komponenten

$$I_x(t)' = -\frac{B}{h} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} + (1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \dot{w} \right] \quad (3.44)$$

und

$$I_y(t)' = -\frac{B}{h} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} + (1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \dot{w} \right] . \quad (3.45)$$

Da im Zeitbereich nur der Momentanwert für jeden diskreten Zeitschritt berechnet werden kann, ist ein Aufteilen der STI in einen aktiven (reellen) und reaktiven (imaginären) Anteil nicht möglich.

4 Auswahl eines Verfahrens zur Berechnung der STI

Es gibt mehrere Näherungsverfahren zur Berechnung der STI, bei denen der Intensitätsfluss aus den Beschleunigungs- oder den Verschiebungsgrößen auf der Struktur berechnet werden kann. Diese Verfahren kommen sowohl in experimentellen als auch in numerischen Untersuchungen zum Einsatz, da in numerischen Simulationen die Berechnung der analytischen Lösung der STI nur für wenige Spezialfälle (z. B. gelenkig gelagerte Platte) möglich ist und die STI somit mit den numerischen Näherungsverfahren berechnet werden muss.

Das 8-Aufnahmerverfahren (PAVIĆ [52]) und das 2-Aufnahmerverfahren (NOISEUX [48]) sind seit mehreren Jahrzehnten bekannt und beruhen auf Vereinfachungen der Berechnungsgleichungen der STI. Es werden auch zwei neue Ansätze vorgestellt, die mittels numerischer Ableitungen die Berechnungsgleichungen der STI (Gleichungen (3.23), (3.24)) direkt lösen. Diese werden als Gradientenverfahren und CDS-Verfahren bezeichnet. Darüber hinaus wird ein Verfahren beschrieben (im Folgenden: Fourier-Verfahren), das im Rahmen der Nahfeldholographie entwickelt wurde und die für die STI benötigten Ableitungen der Oberflächengeschwindigkeiten durch Multiplikationen im Wellenzahlbereich bestimmt (siehe u. a. [30]). Bislang ist kein umfassender Vergleich dieser Verfahren bekannt. Basierend auf einer Fehlerberechnung werden daher alle beschriebenen Verfahren verglichen und bewertet. Auf diese Weise kann für die nachfolgenden Untersuchungen dieser Arbeit das Verfahren bestimmt werden, das am besten geeignet ist, die STI quantitativ richtig zu berechnen und den Verlauf der STI in der Struktur korrekt darzustellen, um damit letztendlich auch die Leistung auf Basis der STI richtig zu berechnen.

4.1 Untersuchung der Fehler der STI-Berechnungsverfahren

Für das 2- und 8-Aufnahmerverfahren wurde bereits eine Fehlerabschätzung von MEUDT [43] durchgeführt und der ermittelte Fehler in dB angegeben. Die Ergebnisse in der Arbeit von MEUDT können aufgrund der logarithmischen Darstellung der Fehler nicht differenziert genug ausgewertet werden. Um aussagekräftigere Ergebnisse für diese Verfahren zu ermitteln, werden beide Berechnungsmethoden erneut untersucht und die Fehler linear dargestellt. Die statistische Auswertung einer Monte-Carlo-Simulation (Grundlagen siehe Anhang A.6) wird als Ansatz zur Fehlerbetrachtung gewählt. Aus der Differenz der numerischen Näherungslösung zur Berechnung der STI und der analytischen Lösung der STI berechnet sich der frequenzabhängige relative Fehler $\epsilon_{\text{STI numerisch, rel}}$ der numerischen Näherungsverfahren zu

$$\epsilon_{\text{STI numerisch, rel}} = \left(\left| \text{Re}\{I'_{\text{analytisch}}\} \right| - \left| \text{Re}\{I'_{\text{numerisch}}\} \right| \right) / \left| \text{Re}\{I'_{\text{analytisch}}\} \right| \cdot 100\% . \quad (4.1)$$

Dieser Fehler wird in der Monte-Carlo-Simulation für verschiedene Diskretisierungsdichten der Platte und variierende Anregungsfrequenzen bestimmt. Dabei wird nur der Realteil der STI betrachtet, da dieser für den Leistungstransport in der Struktur maßgebend ist. Die Schwingungen der Platte wurden unter Verwendung von mehr als 5000 Eigenmoden berechnet. Nach HERING [25] ist die Verwendung dieser sehr großen Anzahl an Eigenmoden notwendig, um sowohl für die Schwingungen der Platte, aus denen

die STI mit den zu untersuchenden Näherungsverfahren bestimmt wird, als auch für die analytische Lösung der STI ein sehr exaktes Ergebnis zu bestimmen. Die Anzahl an Gitterpunkten auf der Platte variiert zwischen 10 und 100 in x -Richtung und jeweils halb so vielen Gitterpunkten in y -Richtung. Der betrachtete Frequenzbereich umfasst 0 – 500 Hz. Zur Bewertung der numerischen STI-Berechnungsverfahren wurde jeweils eine Monte-Carlo-Analyse mit 5000 Simulationen durchgeführt und die Parameter Frequenz und Diskretisierungsdichte in den angegebenen Grenzen variiert. Die quantitative Bewertung der numerischen STI-Berechnungsverfahren erfolgt in Bezug auf die analytische Lösung der STI. Die Zusammenstellung der Berechnungsverfahren beginnt daher mit der analytischen Lösung der STI für eine gelenkig gelagerte Rechteckplatte.

4.1.1 Analytische Berechnung der STI

Das Einsetzen der Gleichungen (2.3) bis (2.6), (2.16) und (2.17) in die Gleichungen (3.28) und (3.29) ermöglicht prinzipiell die analytische Berechnung der STI für eine Platte mit gemischter Randeinspannung. Damit wäre es möglich, die Einspannungsverhältnisse am Prüfstand in der Simulation sehr genau nachzubilden. Die Lösung ist jedoch aufgrund ihrer Komplexität in der Praxis nicht handhabbar, so dass die analytische Lösung der STI nur für die gelenkig gelagerte KIRCHHOFF-Platte berechnet wird. Aus den Gleichungen (2.3), (2.4), (2.16) und (3.28), (3.29) ergibt sich die analytische Lösung der STI ([25, 43]) in x -Richtung

$$\begin{aligned}
 I'_x = & -\frac{B}{2h} \left[-\sum_{m,n} C_{m,n} \alpha_m^2 \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) - \mu \sum_{m,n} C_{m,n} \beta_n^2 \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \right] \\
 & \cdot \left[i\omega \sum_{m,n} C_{m,n}^* \alpha_m \cos(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \right] \\
 & + \frac{B(1-\mu)}{2h} \left[\sum_{m,n} C_{m,n} \alpha_m \beta_n \cos(\alpha_m x) \cos(\beta_n y) \right] \\
 & \cdot \left[i\omega \sum_{m,n} C_{m,n}^* \beta_n \sin(\alpha_m x) \cos(\beta_n y) \right] \\
 & + \frac{B}{2h} \left[\sum_{m,n} C_{m,n} \alpha_m^3 \cos(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) + \sum_{m,n} C_{m,n} \alpha_m \beta_n^2 \cos(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \right] \\
 & \cdot \left[i\omega \sum_{m,n} C_{m,n}^* \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \right]
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

und in y-Richtung

$$\begin{aligned}
 I'_y = & -\frac{B}{2h} \left[-\sum_{m,n} C_{m,n} \beta_n^2 \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) - \mu \sum_{m,n} C_{m,n} \alpha_m^2 \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \right] \\
 & \cdot \left[i\omega \sum_{m,n} C_{m,n}^* \beta_n \sin(\alpha_m x) \cos(\beta_n y) \right] \\
 & + \frac{B(1-\mu)}{2h} \left[\sum_{m,n} C_{m,n} \alpha_m \beta_n \cos(\alpha_m x) \cos(\beta_n y) \right] \\
 & \cdot \left[i\omega \sum_{m,n} C_{m,n}^* \alpha_m \cos(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \right] \\
 & + \frac{B}{2h} \left[\sum_{m,n} C_{m,n} \alpha_m^2 \beta_n \cos(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) + \sum_{m,n} C_{m,n} \beta_n^3 \cos(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \right] \\
 & \cdot \left[i\omega \sum_{m,n} C_{m,n}^* \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \right].
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

In den folgenden Abschnitten werden die numerischen STI-Berechnungsverfahren detailliert vorgestellt und die analytische Lösung der STI als Referenz zur Bewertung der Verfahren verwendet.

4.1.2 Das 8-Aufnehmerverfahren

Bei dem von PAVIĆ [52] vorgestellten 8-Aufnehmerverfahren wird der Biegewellenanteil der STI im Punkt '0' (siehe Abbildung 4.1) durch Summation der Kreuzleistungsspektren von acht Beschleunigungswerten berechnet. Die Anordnung der Messpunkte wird in Abbildung 4.1 gezeigt.

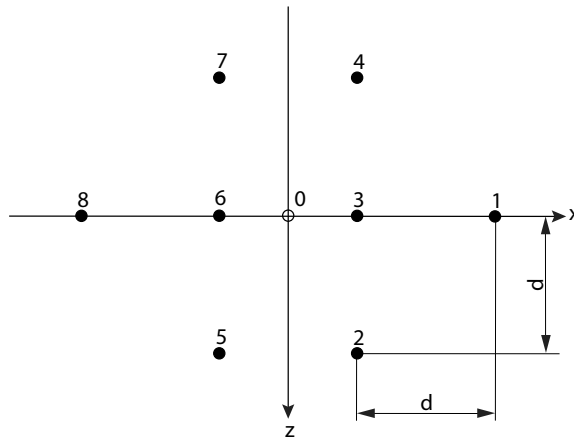


Abbildung 4.1: Anordnung der Messpunkte des 8-Aufnehmerverfahrens

Die STI in x -Richtung berechnet sich aus den Beschleunigungen a_n an den acht Messpunkten nach folgender Gleichung [52]:

$$\begin{aligned}
 I'(x) = \frac{B}{2h\omega^3d^3} & \left[(1 - \mu) \left(\operatorname{Im} \{ \underline{a}_2 \underline{a}_3^* \} + \operatorname{Im} \{ \underline{a}_4 \underline{a}_3^* \} - \operatorname{Im} \{ \underline{a}_5 \underline{a}_6^* \} - \operatorname{Im} \{ \underline{a}_7 \underline{a}_6^* \} \right. \right. \\
 & \left. - \frac{1}{2} \operatorname{Im} \{ \underline{a}_2 \underline{a}_5^* \} + \frac{1}{2} \operatorname{Im} \{ \underline{a}_2 \underline{a}_7^* \} + \frac{1}{2} \operatorname{Im} \{ \underline{a}_4 \underline{a}_5^* \} - \frac{1}{2} \operatorname{Im} \{ \underline{a}_4 \underline{a}_7^* \} \right) \\
 & + (1 + \mu) \left(-\operatorname{Im} \{ \underline{a}_5 \underline{a}_3^* \} - \operatorname{Im} \{ \underline{a}_7 \underline{a}_3^* \} + \operatorname{Im} \{ \underline{a}_2 \underline{a}_6^* \} + \operatorname{Im} \{ \underline{a}_4 \underline{a}_6^* \} \right) \\
 & \left. + 4\mu \operatorname{Im} \{ \underline{a}_6 \underline{a}_3^* \} + 12 \operatorname{Im} \{ \underline{a}_6 \underline{a}_3^* \} - 2 \operatorname{Im} \{ \underline{a}_8 \underline{a}_3^* \} + 2 \operatorname{Im} \{ \underline{a}_1 \underline{a}_6^* \} \right] .
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Der relative Fehler des 8-Aufnahmeverfahrens $\epsilon_{8A, \text{rel}}$ wurde analog zu Gleichung (4.1) berechnet und der Mittelwert μ und die Standardabweichung σ wurden über die Anzahl der Gitterpunkte (Abbildung 4.2) sowie die Frequenz (Abbildung 4.3) aufgetragen. Das 8-Aufnahmeverfahren bildet die Verläufe der STI qualitativ sehr gut ab (Abbildung 4.14 auf S. 47), ist jedoch für eine quantitative Berechnung der STI nicht geeignet, was in den folgenden Abbildungen gezeigt wird.

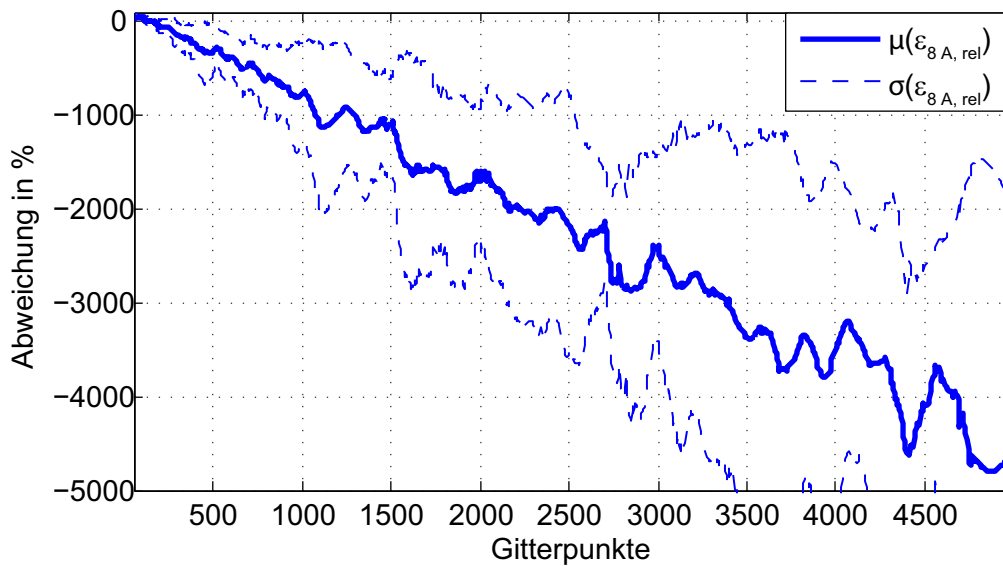


Abbildung 4.2: Relativer Fehler des 8-Aufnahmeverfahrens in Abhängigkeit von der Vernetzungsdichte

Für eine steigende Anzahl an Berechnungspunkten auf der Platte nimmt der mittlere Fehler des 8-Aufnahmeverfahrens deutlich zu (Abbildung 4.2). In Abbildung 4.3 ist der Fehler des 8-Aufnahmeverfahrens über die Frequenz aufgetragen. Um auftretende Abhängigkeiten des Fehlers von den Eigenfrequenzen der Platte zu identifizieren, ist zusätzlich die normierte Verschiebung abgebildet. In Abbildung 4.3 ist ein konvergierendes Verhalten des Fehlers für größer werdende Frequenzen erkennbar, die verbleibenden Fehler liegen bei 500 Hz jedoch noch über 500 %. Eine Abhängigkeit des Fehlers von den Eigenfrequenzen kann nicht festgestellt werden. Diese Feststellungen decken sich mit den Ergebnissen von Meudt [43], der Phasen- und Differenzenfehler als Ursache für die Abweichungen identifiziert hat. Darüber hinaus erfordert die Anordnung der Messpunkte eine Interpolation der Daten zur Berechnung der x - und y -Komponente der STI in einem Punkt. Aufgrund der Anordnung der Mess-

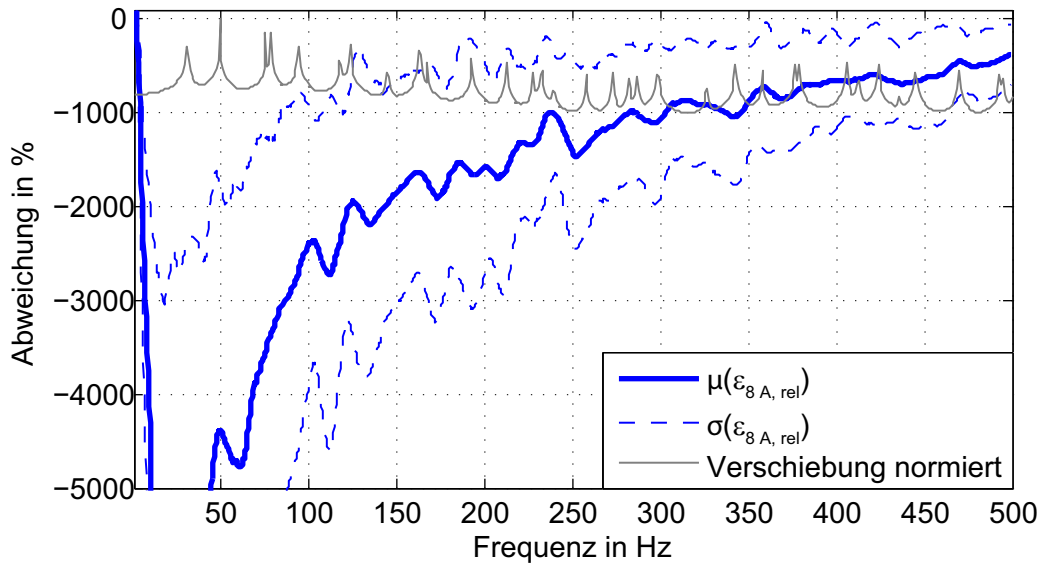


Abbildung 4.3: Relativer Fehler des 8-Aufnahmeverfahrens in Abhängigkeit von der Frequenz

punkte kann mit diesem Verfahren die STI in Randbereichen der Struktur nicht berechnet werden. An dieser Stelle muss ein Vorwärtsdifferenzen- oder Rückwärtsdifferenzenverfahren verwendet werden. Das 8-Aufnahmeverfahren wird nicht für weitere numerische und experimentelle Untersuchungen verwendet, da die quantitativen Fehler des Verfahrens zu groß sind. Daher wurde keine weitere Analyse dieses Berechnungsverfahrens zur Klärung der Abweichungen durchgeführt.

4.1.3 Das 2-Aufnahmeverfahren

Das 2-Aufnahmeverfahren geht auf Vereinfachungen von NOISEUX [48] zurück und ist in der Praxis weit verbreitet. Aufgrund der getroffenen Vereinfachungen ist dieses Verfahren nur im Fernfeld, d. h. mit einem frequenz- und wellenlängenabhängigen Abstand von der Quelle und von den Rändern gültig. Wie in Abbildung 4.4 zu erkennen ist, werden zur Berechnung der STI im Punkt '0' nur zwei benachbarte Messpunkte verwendet, und es ergibt sich aus den beiden Beschleunigungen $a_1(\omega)$ und $a_2(\omega)$ für die STI in x -Richtung die Näherung

$$I'(x) = \frac{\sqrt{Bm'}}{hd\omega^2} \left[2 \operatorname{Im} \{ a_1(\omega) a_2^*(\omega) \} + i (|a_1(\omega)|^2 - |a_2(\omega)|^2) \right] \quad (4.5)$$

mit der Massenbelegung $m' = \rho h$, der Biegesteifigkeit der Platte B und dem Aufnehmerabstand d . Die Berechnung in y -Richtung erfolgt analog.

Auch das 2-Aufnahmeverfahren bildet die Verläufe der STI qualitativ sehr gut ab (Abbildung 4.14 auf S. 47) und ist einfach zu implementieren und anzuwenden. Es kann daher verwendet werden, um den STI-Verlauf in der Struktur qualitativ darzustellen. Für eine quantitative Berechnung der STI ist es im untersuchten Frequenzbereich jedoch nicht geeignet, was durch folgende Analyse unter Verwendung von Gleichung (4.1) gezeigt wird.

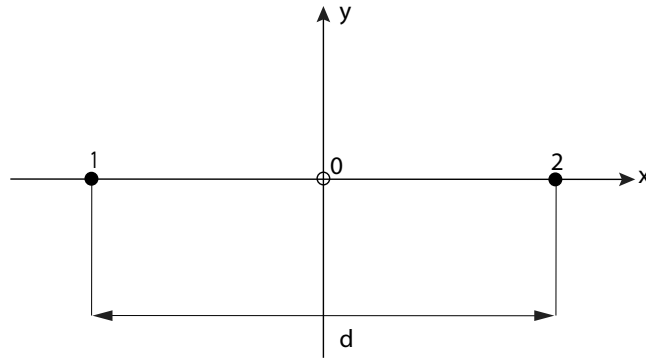


Abbildung 4.4: Messpunkte für die Berechnung der STI nach dem 2-Aufnahmeverfahren

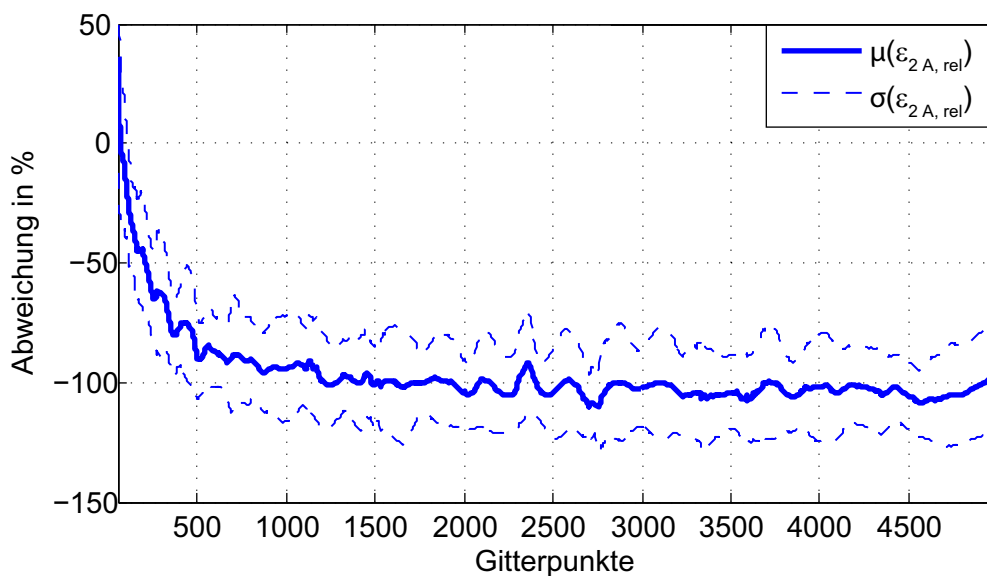


Abbildung 4.5: Relativer Fehler des 2-Aufnahmeverfahrens in Abhängigkeit von der Vernetzungsdichte

Der Mittelwert des relativen Fehlers des 2-Aufnahmeverfahrens $\epsilon_{2A,rel}$ in Abhängigkeit von der Anzahl an Gitterpunkten auf der Platte ist in Abbildung 4.5 dargestellt. Es zeigt sich, dass der Fehler mit feinerer Diskretisierung sogar zunimmt und im untersuchten Bereich etwa -100% beträgt. Die Standardabweichung des Fehlers beträgt ca. 20% . Die Fehler resultieren aus Differenzenfehlern und den zur Herleitung des Verfahrens getroffenen Vereinfachungen.

Die Abbildung 4.6 zeigt das Verhalten des 2-Aufnahmeverfahrens im Frequenzbereich. Der relative Fehler des 2-Aufnahmeverfahrens beträgt nahezu über den kompletten Frequenzbereich etwa 100% , die Streuung nimmt zu hohen Frequenzen hin zu. Eine Abhängigkeit des Fehlers von der Lage der Eigenfrequenzen kann nicht erkannt werden.

Wie im vorherigen Abschnitt decken sich diese Ergebnisse mit denen von Meudt [43]. Das 2-Aufnahmeverfahren ist aber im Vergleich zum 8-Aufnahmeverfahren weniger empfindlich gegenüber Differenzenfehlern [43], was den geringeren Gesamtfehler im Vergleich mit dem 8-Aufnahmeverfahren erklärt. Auch dieses Verfahren wird aufgrund der großen Fehler im betrachteten Frequenzbereich in dieser Arbeit nicht weiter berücksichtigt.

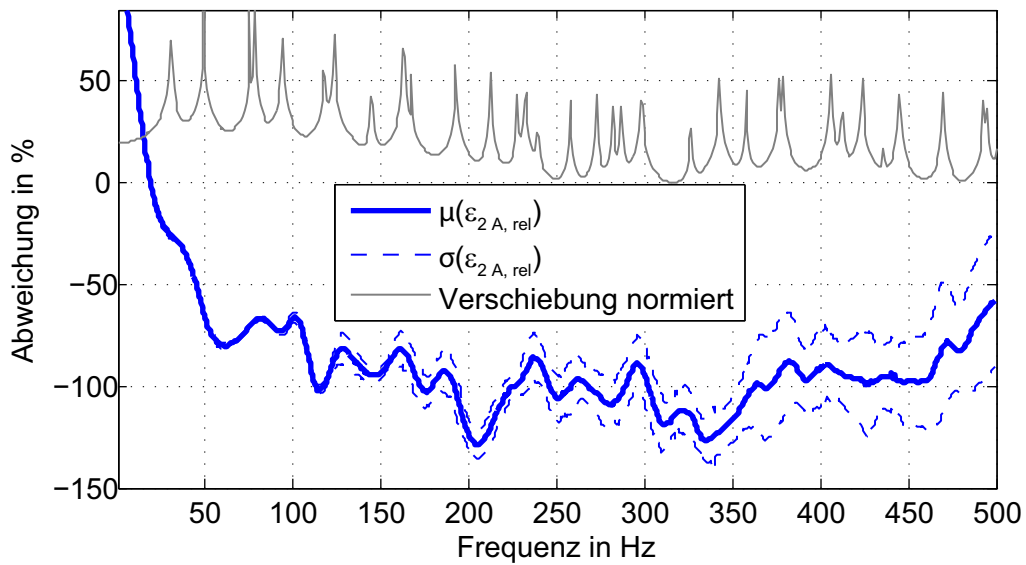


Abbildung 4.6: Relativer Fehler des 2-Aufnahmeverfahrens in Abhängigkeit von der Frequenz

4.1.4 Intensitätsberechnung mittels 2-D-Fouriertransformation

Die 2-D-Fouriertransformation kommt häufig im Rahmen der akustischen Nahfeldholographie zum Einsatz, um die Oberflächengeschwindigkeiten aus der Druckverteilung im Nahfeld der Struktur zu berechnen (z. B. [84, 85, 86]). Mit der Fouriertransformation werden aber auch die für die STI-Berechnung benötigten Ortsableitungen in den Gleichungen (3.28) und (3.29) bestimmt. Das Verfahren kann somit direkt auf Geschwindigkeitsdaten aus Laservibrometermessungen angewendet werden [30, 51]. Zur Berechnung der Ortsableitung im Wellenzahlbereich erfolgt zuerst eine örtliche, zweidimensionale Fouriertransformation der Geschwindigkeitsmatrix \mathbf{v} in den Wellenzahlbereich. Anschließend multipliziert man die transformierte Matrix mit den Wellenzahlmatrizen k_x und k_y (Wellenzahlen in x - und y -Richtung) und der imaginären Einheit i . Zuletzt wird eine inverse zweidimensionale Fouriertransformation durchgeführt. Dieses Verfahren wird u. a. von Williams [85] beschrieben und durch folgende Gleichung mathematisch ausgedrückt

$$\frac{\delta^{m+n}}{\delta x^m \delta y^n} v(x, y) = F^{-1} \left\{ (ik_x)^m (ik_y)^n F \{ v(x, y) \} \right\}. \quad (4.6)$$

Hierbei bedeutet F die zweidimensionale Fouriertransformation und F^{-1} die inverse zweidimensionale Fouriertransformation. Das Ergebnis der zweidimensionalen Fouriertransformation der 1-2-Mode in Abbildung 4.7 zeigt den Betrag der komplexen Verschiebungsamplituden im Wellenzahlbereich. Die Transformation bestimmt die Wellenanteile, die benötigt werden, um in diesem Beispiel die Verschiebung der 1-2-Mode darzustellen.

Der Nullpunkt des Spektrums im Wellenzahlbereich (Abbildung 4.7) liegt in der linken oberen Ecke bei den Koordinaten $x = 1$ und $y = 41$. Das Spektrum ist doppelseitig sowohl in x -Richtung als auch in y -Richtung. Die Wellenzahlen steigen demnach in x -Richtung und in y -Richtung zur Mitte des Spektrums hin an. Da das Spektrum doppelseitig ist, wechselt in der Mitte das Vorzeichen der Wellenzahlen,

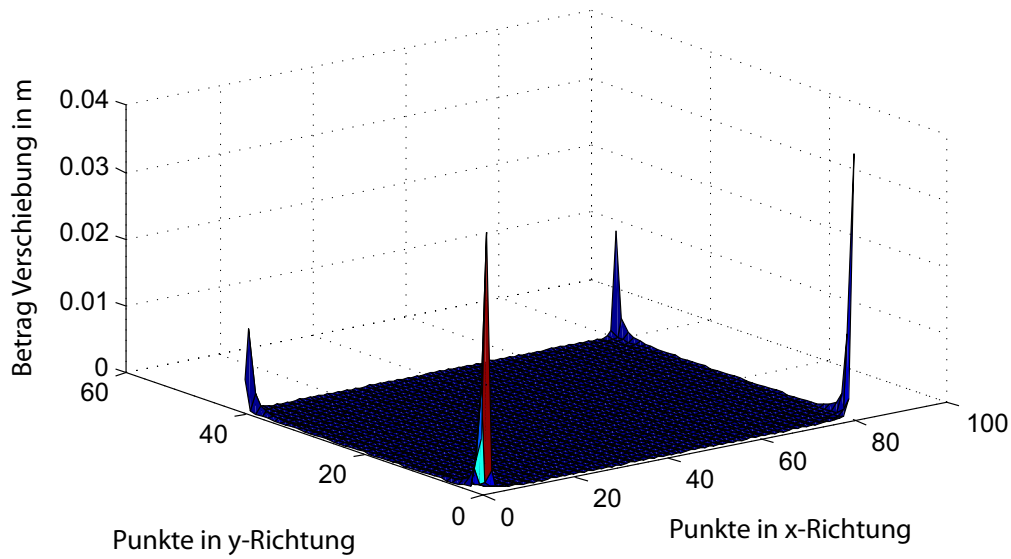


Abbildung 4.7: Wellenzahlbereich nach 2-D-FFT

und diese nehmen zu den jeweils gegenüberliegenden Rändern hin wieder ab. Darüber hinaus gibt es eine alternative Darstellung zu Abbildung 4.7, die ebenfalls in Veröffentlichungen verwendet wird, bei der der Nullpunkt in der Mitte liegt und der Betrag der Wellenzahlen nach außen hin zunimmt.

Bei der Fouriertransformation im Zeitbereich muss die Abtastfrequenz des Zeitsignals mehr als doppelt so groß sein wie die größte im Zeitsignal auftretende Frequenz. Im Ortsbereich entspricht die Abtastfrequenz der örtlichen Diskretisierung der Struktur, d. h. der Anzahl an Punkten i in x -Richtung und j in y -Richtung. Bei der zweidimensionalen örtlichen Fouriertransformation einer Matrix der Größe (i, j) werden demnach in x -Richtung nur die Wellenzahlen $k_{x,m}$ für $m \leq i/2$ und in y -Richtung nur die Wellenzahlen $k_{y,n}$ für $n \leq j/2$ berücksichtigt. Dadurch kann ein Fehler durch Aliasing vermieden werden.

Um Rauschanteile bei gemessenen Geschwindigkeiten und numerische Fehler zu minimieren, wird analog zu NEJADE et al. [47] ein wellenzahlabhängiges Bandpassfilter entworfen. Die Biegewellenzahl k_{BW} für eine gelenkig gelagerte Platte ist definiert als

$$k_{BW} = \frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt[4]{B/(\rho \cdot h)}}. \quad (4.7)$$

Die Spitzen in Abbildung 4.7 gehören zur 1-2-Mode mit der entsprechenden Wellenzahl k_{BW} und weiteren direkt benachbarten Moden. Verwendet man sehr viele Wellenzahlen für die Berechnung des Spektrums, werden vor allem höherfrequente Rauschanteile verstärkt. Um dies zu vermeiden, wird ein spektrales Bandpassfilter bei der Wellenzahl k_{BW} zentriert, um so nur direkt benachbarte Moden in die Berechnung des Spektrums einzubeziehen. Die Anzahl der berücksichtigten Wellenzahlen definiert die Breite des Filters. In den Eigenfrequenzen der gelenkig gelagerten Platte stimmt die Biegewellenzahl k_{BW} mit der Wellenzahl der Struktur

$$k_{\text{BW } m,n} = \pi \sqrt{(2m/a)^2 + (2n/b)^2}; \quad m = 1, 2, \dots, i, \quad n = 1, 2, \dots, j \quad (4.8)$$

überein. In Gleichung (4.8) ist a die Abmessung der Platte in x -Richtung und b die Abmessung der Platte in y -Richtung. In einer Schleife können nun durch wiederholtes Vergleichen von Gleichung (4.8) mit (4.7) die Indizes m und n gefunden werden, die zu den direkt benachbarten Wellenzahlen der betrachteten Mode gehören. Das Verfahren setzt damit voraus, dass die beschriebenen Wellenzahlen der untersuchten Struktur bekannt sind.

Die Fehlerbetrachtung erfolgt auch hier analog zu Gleichung (4.1). Das STI-Berechnungsverfahren mittels 2D-Fouriertransformation ermöglicht, wie oben beschrieben, die Verwendung eines Bandpassfilters im Wellenzahlbereich. Die Simulationsergebnisse mit drei, fünf und sieben berücksichtigten Moden zur Berechnung der STI unterscheiden sich nur unwesentlich, daher werden im Folgenden nur Ergebnisse für 5 Moden gezeigt. Im Unterschied zu den in den vorherigen Abschnitten untersuchten Verfahren musste für das Fourier-Verfahren eine größere minimale Diskretisierungsdichte von $40 \times 20 = 800$ Punkten auf der Platte gewählt werden, da bei geringerer Diskretisierung die Ergebnisse aufgrund zu großer Fehler nicht verwendbar sind.

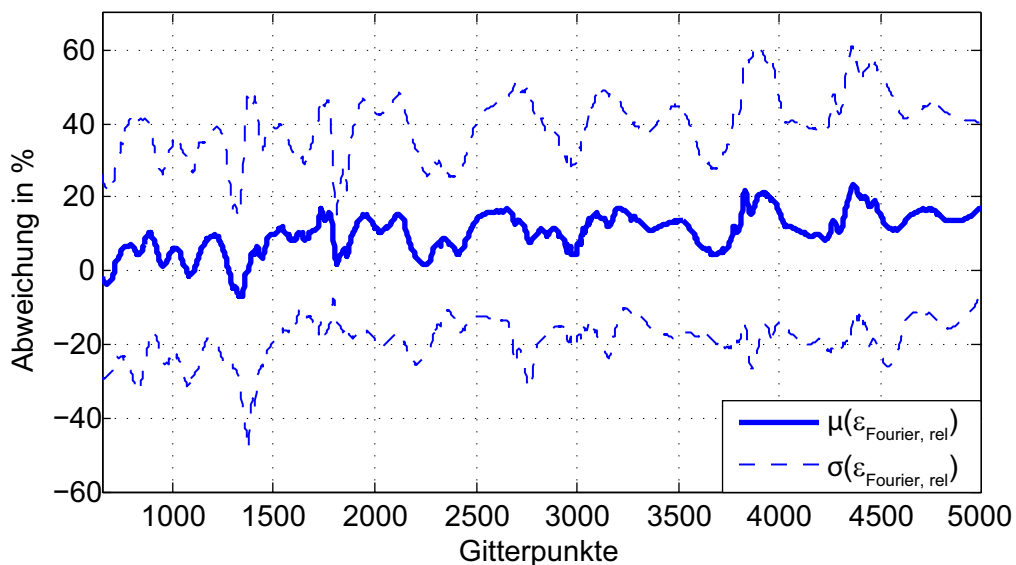


Abbildung 4.8: Relativer Fehler des Fourier-Verfahrens in Abhängigkeit von der Vernetzungsdichte

Der Verlauf des relativen Fehlers $\epsilon_{\text{Fourier, rel}}$ in Abhängigkeit von der Vernetzungsdichte ist in Abbildung 4.8 dargestellt. Der Mittelwert des Fehlers hat sein Minimum zwischen 800 und 1500 Gitterpunkten auf der Platte. Zu höheren Vernetzungsdichten hin nimmt der Fehler leicht zu und beträgt bei 5000 Punkten auf der Platte ca. 20 %. Die Streuung, die nahezu unabhängig von der Vernetzung ist, beträgt in etwa 20 %.

Der mittlere Fehler der STI-Berechnung mittels Fouriertransformation $\epsilon_{\text{Fourier, rel}}$ im Frequenzbereich (Abbildung 4.9) liegt für Frequenzen bis 250 Hz zwischen -45 % und 0 %. Für höhere Frequenzen steigt der mittlere Fehler auf bis zu 50 %. Die frequenzabhängigen Schwankungen des Fourier-Verfahrens

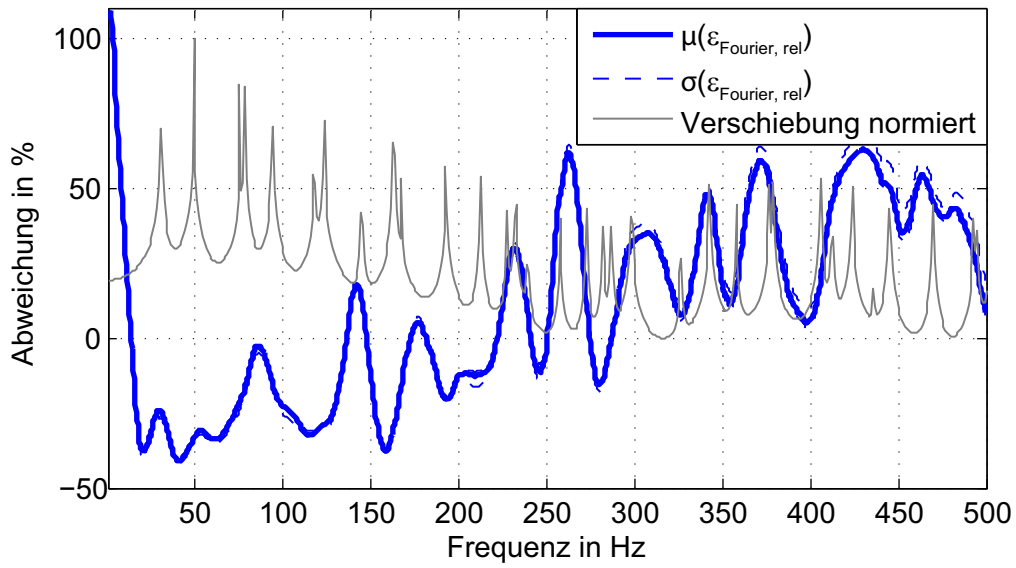


Abbildung 4.9: Relativer Fehler des Fourier-Verfahrens in Abhängigkeit von der Frequenz

sind deutlich größer als die Schwankungen des CDS-Verfahrens (Abbildung 4.13 auf S. 46) oder des Gradientenverfahrens (Abbildung 4.11 auf S. 44).

4.1.5 Das Gradientenverfahren

Das in diesem Abschnitt vorgestellte Verfahren greift zur Bestimmung der STI-Komponenten auf die Berechnungsgleichungen der STI (Gleichungen (3.28) und (3.29)) zurück. Die Ableitungen werden numerisch mit dem Zentralkommenenverfahren berechnet. Dieses Verfahren wird im Folgenden als Gradientenverfahren bezeichnet. Im Rahmen dieser Arbeit wird die Gradient-Funktion in Matlab zur Berechnung der Ableitungen in den Bestimmungsgleichungen der STI verwendet. Diese Funktion verwendet – wenn möglich – das Zentralkommenenverfahren (Gleichung (4.9)). An den Rändern der Struktur wird entweder das Vorwärtsdifferenzenverfahren (Gleichung (4.10)) oder das Rückwärtsdifferenzenverfahren (Gleichung (4.11)) angewendet. In den folgenden Gleichungen ist $w(i, j)$ die Verschiebung senkrecht zur Oberfläche an der Stelle (i, j) . Δx beschreibt den Gitterabstand in x -Richtung. Die Rechenvorschriften für die y -Richtung werden analog gebildet.

$$\frac{\delta w}{\delta x} = \frac{w(i+1, j) - w(i-1, j)}{2 \cdot \Delta x} + O(\Delta x^2), \quad (4.9)$$

$$\frac{\delta w}{\delta x} = \frac{w(i+1, j) - w(i, j)}{\Delta x} + O(\Delta x), \quad (4.10)$$

$$\frac{\delta w}{\delta x} = \frac{w(i, j) - w(i-1, j)}{\Delta x} + O(\Delta x). \quad (4.11)$$

Die Fehlerordnung wird mit Hilfe des Buchstaben 'O' angegeben und hängt von der Gitterweite Δx oder Δy ab. Das Zentralknotenverfahren (4.9) hat einen Interpolationsfehler zweiter Ordnung [63] und hat damit bei kleinen Gitterweiten einen Vorteil gegenüber den Verfahren mit Interpolationsfehler erster Ordnung (Gleichungen (4.10), (4.11)). Werden mit dem Zentralknotenverfahren höhere Ableitungen durch mehrfaches Ausführen des Algorithmus berechnet, ergibt sich beispielsweise für die dritte Ableitung $\frac{\delta^3 w}{\delta x^3}$ ein Fehler der Ordnung $O(3 \cdot \Delta x^2)$.

Dieses Verfahren erlaubt neben der qualitativen Analyse auch die quantitative Analyse des Energieflusses und ist damit grundlegende Berechnungsmethode für die Energiebilanzen am passiven und aktiven System sowohl in der Simulation als auch im Versuch. Der frequenzabhängige Fehler des Gradientenverfahrens $\epsilon_{\text{Grad, rel}}$ in Bezug auf die analytische Lösung der STI ergibt sich aus Gleichung (4.1).

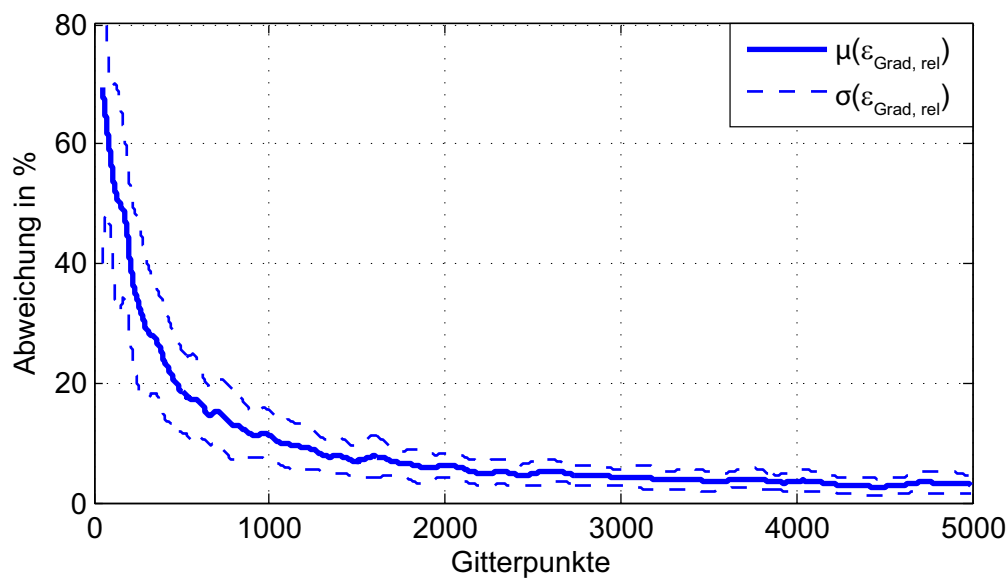


Abbildung 4.10: Relativer Fehler des Gradientenverfahrens in Abhängigkeit von der Vernetzungsdichte

Abbildung 4.10 zeigt den relativen Fehler zwischen dem Gradientenverfahren und der analytischen Berechnung der STI in Abhängigkeit von der Diskretisierung. Erwartungsgemäß werden der Fehler und die Streuung mit dichter Vernetzung kleiner und konvergieren gegen 0 %.

Wie in der Frequenzbereichsdarstellung in Abbildung 4.11 zu sehen ist, beträgt die relative Abweichung unter 25 Hz bis zu 100 %. Im Bereich von 25 Hz bis etwa 150 Hz beträgt die Abweichung in Abhängigkeit von der gewählten Diskretisierung zwischen 0 % und 20 %. Zu höheren Frequenzen hin nehmen der mittlere Fehler und die Streuung zu. Zudem wird deutlich, dass die Eigenfrequenzen (bzw. die Verschiebungsamplitude) keinen nennenswerten Einfluss auf den Fehler hat.

4.1.6 Das CDS-Verfahren

Ein Nachteil des Gradientenverfahrens ist, dass das Zentralknotenverfahren für höhere Ableitungen rekursiv ausgeführt werden muss. Bildet man die höheren und gemischten Ableitungen direkt aus den Verschiebungen der diskreten Punkte auf der Platte, ergibt sich damit ein Vorteil, da die Fehler dieser Ter-

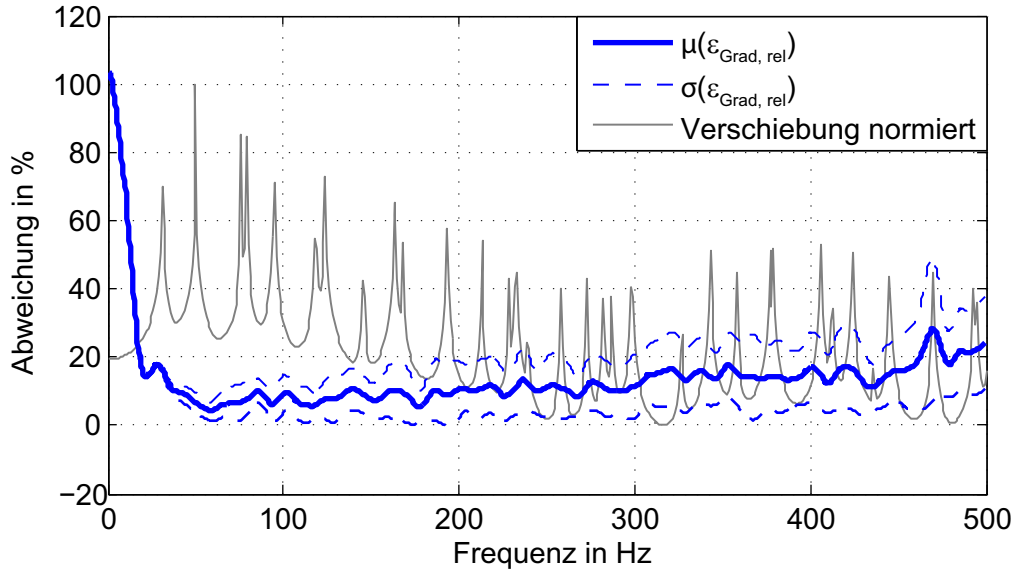


Abbildung 4.11: Relativer Fehler des Gradientenverfahrens in Abhängigkeit von der Frequenz

me von zweiter Ordnung sind. Diese Methode wird im Folgenden CDS-Verfahren genannt. Die höheren und gemischten Ableitungen berechnen sich wie folgt [63]:

$$\frac{\delta^2 w}{\delta x^2} = \frac{w(i+1, j) - 2w(i, j) + w(i-1, j)}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2), \quad (4.12)$$

$$\frac{\delta^2 w}{\delta y^2} = \frac{w(i, j+1) - 2w(i, j) + w(i, j-1)}{\Delta y^2} + O(\Delta y^2), \quad (4.13)$$

$$\frac{\delta^2 w}{\delta x \delta y} = \frac{w(i, j+1) - w(i-1, j+1) - w(i+1, j-1) + w(i-1, j-1)}{4 \cdot \Delta x \Delta y} + O(\Delta y^2), \quad (4.14)$$

$$\frac{\delta^3 w}{\delta x^3} = \frac{w(i+2, j) - 2w(i+1, j) + 2w(i-1, j) - w(i-2, j)}{2 \cdot \Delta x^3} + O(\Delta x^2), \quad (4.15)$$

$$\frac{\delta^3 w}{\delta y^3} = \frac{w(i, j+2) - 2w(i, j+1) + 2w(i, j-1) - w(i, j-2)}{2 \cdot \Delta y^3} + O(\Delta y^2), \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta^3 w}{\delta x^2 \delta y} &= \frac{w(i+1, j+1) - 2w(i, j+1) + 2w(i, j-1)}{2 \cdot \Delta x^2 \Delta y} \\ &+ \frac{w(i-1, j+1) - w(i+1, j-1) - w(i-1, j-1)}{2 \cdot \Delta x^2 \Delta y} + O(\Delta x^2), \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta^3 w}{\delta x \delta y^2} = & \frac{w(i+1, j+1) - 2w(i+1, j) + 2w(i-1, j)}{2 \cdot \Delta x^2 \Delta y} \\ & + \frac{w(i+1, j-1) - w(i-1, j+1) - w(i-1, j-1)}{2 \cdot \Delta x^2 \Delta y} + O(\Delta x^2). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Da diese Verfahren zur Berechnung der dritten Ableitung (Gleichungen (4.15) und (4.16)) die Verschiebungen von je zwei benachbarten Gitterpunkten benötigen, können diese Ableitungen an den beiden äußeren Reihen der Struktur nicht berechnet werden. Die Ableitungen dieser Punkte werden daher weiterhin mit der Gradient-Funktion (Gradientenverfahren) bestimmt.

Die Abbildung 4.12 zeigt den analog zur Gleichung (4.1) berechneten relativen Fehler des CDS-Verfahrens $\epsilon_{\text{CDS, rel}}$ in Abhängigkeit von der Vernetzungsdichte. Der mittlere Fehler nimmt verglichen mit dem Gradientenverfahren (Abbildung 4.10) bei steigender Vernetzungsdichte schneller ab. Allerdings ist die Streuung des CDS-Verfahrens im Vergleich zum Gradientenverfahren auch bei hoher Vernetzungsdichte größer.

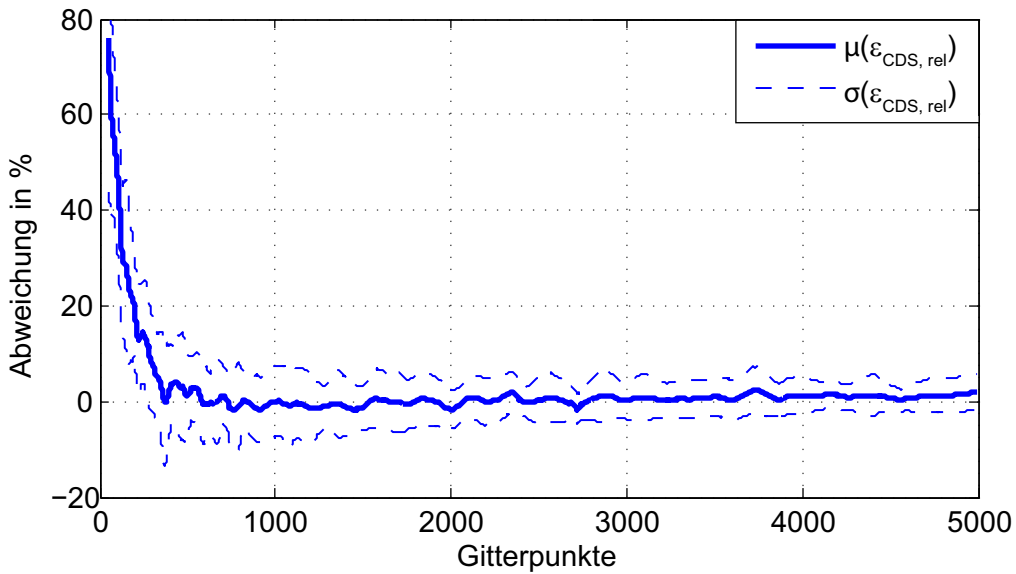


Abbildung 4.12: Relativer Fehler des CDS-Verfahrens in Abhängigkeit von der Vernetzungsdichte

Die Abbildung 4.13 zeigt das Verhalten des CDS-Verfahrens im Frequenzbereich. Bis ca. 125 Hz beträgt die mittlere Abweichung des CDS-Verfahrens bezogen auf die analytische Lösung der STI etwa 10 %, unter 25 Hz steigt sie auf bis zu 100 % an. Im Frequenzbereich bis 500 Hz schwankt der mittlere Fehler um 0 % mit leicht zunehmender Streuung. Auch dieses Verfahren zeigt keine Abhängigkeit des Fehlers von der Verschiebungsamplitude.

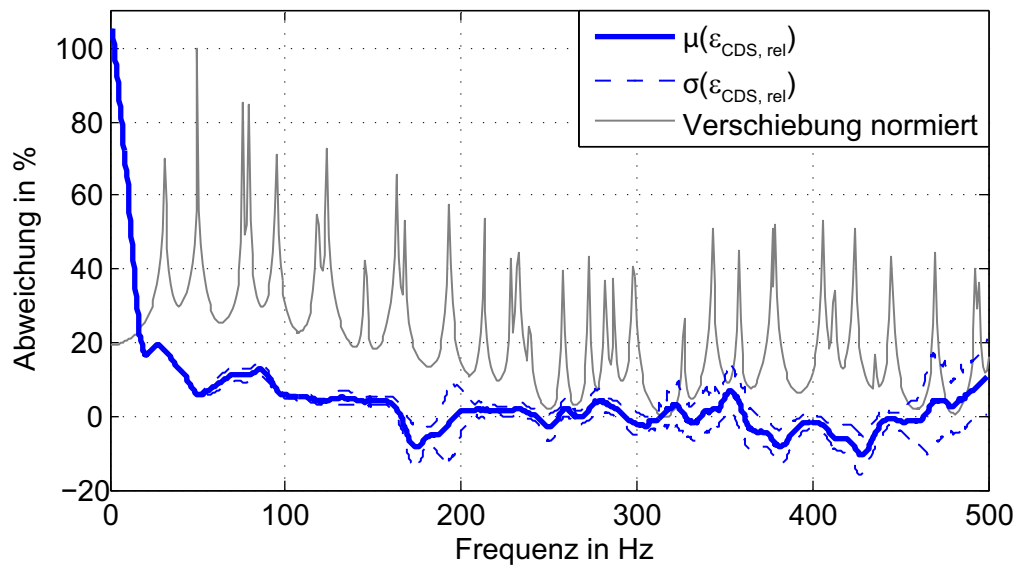


Abbildung 4.13: Relativer Fehler des CDS-Verfahrens in Abhängigkeit von der Frequenz

4.2 Direkter Vergleich und Auswahl des Berechnungsverfahrens

Im Folgenden werden die im vorherigen Abschnitt beschriebenen STI-Verfahren qualitativ und quantitativ miteinander verglichen, indem der Verlauf des Realteils der STI und der relative Fehler des Betrags des Realteils der STI bezogen auf die analytische Lösung (Gleichung (4.1)) der Platte dargestellt werden.

Abbildung 4.14 zeigt den STI-Verlauf aller in Abschnitt 4.1 im Detail vorgestellten Verfahren beispielhaft für die 1-2-Mode. Die Quelle ist in allen Abbildung zusätzlich mit einem schwarzen Kreis markiert. Mit Ausnahme des Fourier-Verfahrens geben alle Verfahren den STI-Verlauf qualitativ sehr gut wieder. In den Verläufen des CDS- und des Gradientenverfahrens ist wie in der analytischen Lösung die Quelle auch aus dem Verlauf erkennbar. Beim 2- und 8-Aufnehmer-Verfahren wird die Quelle durch einen Wirbel überlagert und ist damit weniger gut zu lokalisieren.

Für das Gradientenverfahren, das CDS-Verfahren, das 2-Aufnehmerverfahren und das Fourier-Verfahren wird in Abbildung 4.15 der relative Fehler $\epsilon_{\text{STI numerisch, rel}}$ (Gleichung (4.1)) des Realteils der STI, der in Abbildung 4.14 gezeigten 1-2-Mode dargestellt. Der relative Fehler des 8-Aufnehmerverfahrens ist mit weit über 100 % so groß, dass er in diesem Vergleich nicht gezeigt wird (vergleiche Abschnitt 4.1.2).

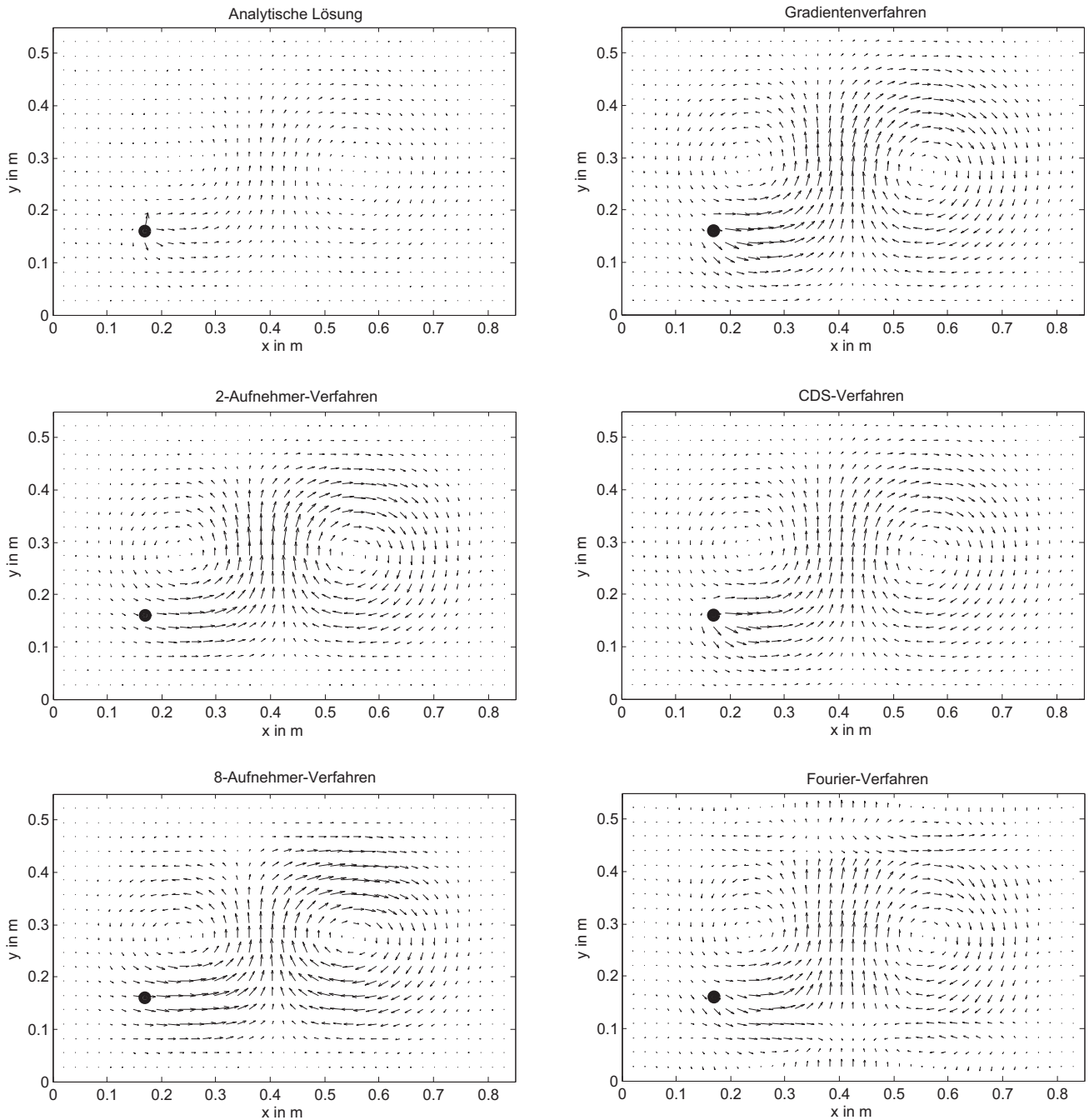


Abbildung 4.14: STI-Verlauf aller untersuchten Berechnungsverfahren für die 1-2-Mode

Die Fehler des Gradientenverfahrens und des CDS-Verfahrens sind in diesem Vergleich deutlich kleiner als die Fehler der anderen beiden Verfahren. Nennenswerte Abweichungen zur analytischen Lösung treten jedoch im Bereich der Quelle (Krafteinleitungspunkt) auf. Aufgrund der geringen Modendichte bei niedrigen Frequenzen sind die Abweichungen des Fourier-Verfahrens in der 1-2-Mode relativ groß, bei höheren Frequenzen werden die Abweichungen dieses Verfahrens bezüglich der analytischen Lösung kleiner (siehe Abschnitt 4.1.4). Die Abweichungen des 2-Aufnehmerverfahrens liegen für die 1-2-Mode (aber auch im gesamten betrachteten Frequenzbereich bis 500 Hz) bei etwa 100 %.

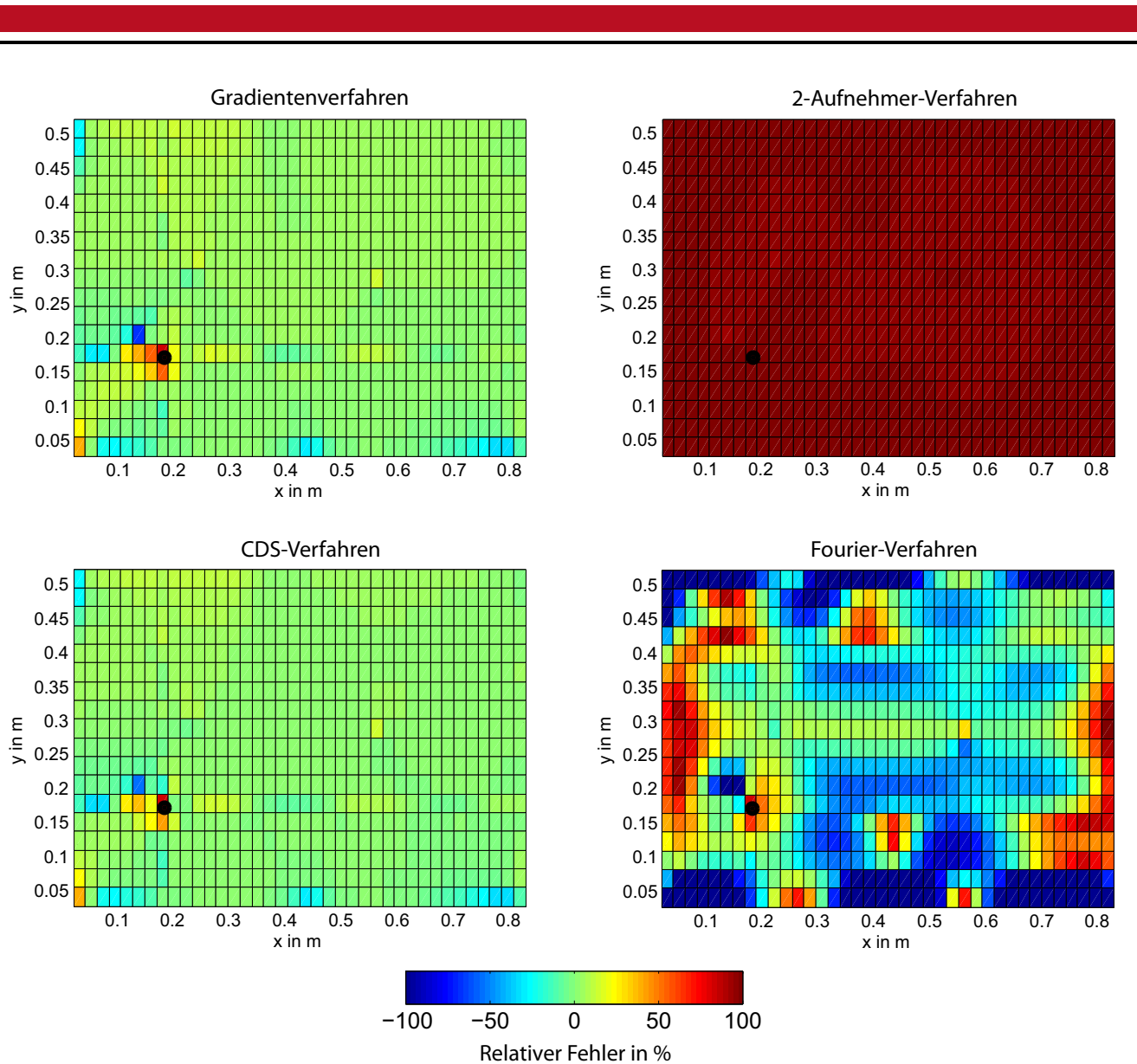


Abbildung 4.15: Relativer Fehler des Betrages der STI der untersuchten Berechnungsverfahren für die 1-2-Mode

Aus den gezeigten Vergleichen der Verfahren und den Ergebnissen aus Abschnitt 4.1 wird deutlich, dass das Gradientenverfahren und das CDS-Verfahren am besten geeignet sind, die STI qualitativ und quantitativ zu berechnen. Welches dieser beiden Verfahren in der numerischen Simulation oder im Experiment verwendet wird, hängt vom konkreten Anwendungsfall ab. Da der mittlere Fehler des CDS-Verfahrens in Abhängigkeit von der Diskretisierung schneller gegen 0 konvergiert, eignet es sich besonders bei geringer Gitterpunktanzahl auf der Struktur. Kann die Struktur fein abgetastet werden, ist das Gradientenverfahren vorzuziehen, da die Streuung im Vergleich zum CDS-Verfahren etwas geringer ist.

5 Verbesserung der STI-Berechnung aus Messdaten

In Abschnitt 3.3 wurde gezeigt, dass der Wirkleistungsfluss in der Struktur (Realteil der STI) von der Dissipation im System abhängt. Das bedeutet, dass die Dissipationsmechanismen im System bekannt und korrekt modelliert werden müssen, um die STI in numerischen Simulationen richtig zu berechnen. Dies ist besonders für die Bewertung des Energieflusses in der Struktur wichtig, um den gezielten Einsatz von Schwingungsminderungsmaßnahmen zu ermöglichen. Für einfachere Strukturen ist dies noch möglich, aber für komplexe Bauteile mit zahlreichen Fügstellen (Niet-, Schweiß-, Schraubverbindungen usw.) wird es sehr schwierig, alle Dissipationmechanismen genau zu beschreiben. Da für zahlreiche Strukturen die messtechnische Erfassung der Oberflächengeschwindigkeiten (z. B. mit einem Scanning-Laservibrometer) möglich ist und damit die STI berechnet werden kann, ist somit ein Abgleich der Ergebnisse der numerischen Simulation mit den Ergebnissen aus experimentellen Untersuchungen möglich. Die experimentelle Erfassung der STI hat den Vorteil, dass alle Dämpfungsmechanismen im Bauteil richtig erfasst werden. Die Qualität der aus Messungen berechneten STI hängt dann jedoch vom Messfehler des verwendeten Messsystems ab. Daher werden in diesem Kapitel die Auswirkungen der Streuung der Messgrößen auf die Berechnung der STI genauer untersucht. Die Streuung der gemessenen Größen führt vor allem bei tiefen Frequenzen zu Abweichungen in Betrag und Richtung des STI-Vektors. Um dennoch eine möglichst fehlerfreie Berechnung der STI zu ermöglichen, wird auf die gemessenen Daten ein Mittelungsverfahren angewendet. Es wird gezeigt, dass die Anwendung dieses Verfahrens nur bis zu einer strukturabhängigen Frequenzgrenze sinnvoll ist. Aus definierten Messreihen wird die Standardabweichung des Messfehlers bestimmt, der somit in der numerischen Simulation verwendet werden kann, um die Wirksamkeit des Mittelungsverfahrens in numerischen Simulationen nachzuweisen. Durch Variation der aus der Messung bestimmten Standardabweichung des Messfehlers wird in numerischen Simulationen gezeigt, dass die Anwendung des Mittelungsverfahrens auch bei deutlich größeren Messfehlern zu sehr guten Ergebnissen bei der STI-Berechnung führt. Mittels Monte-Carlo-Simulation werden die Ergebnisse für Platten unterschiedlicher Seitenverhältnisse verallgemeinert.

5.1 Auswirkung von Messfehlern auf die Berechnung der STI

Zur Bestimmung der Wiederholgenauigkeit innerhalb von Messreihen (nacheinander durchgeführte Messungen mit je 920 Messpunkten auf der Platte) wird die Standardabweichung der Amplitude und der Phase der Verschiebung für 30 wiederholte Messungen bei 34 Hz (1-1-Mode) und 75 Hz (1-2-Mode) berechnet. Zuerst wird für beide Größen die Standardabweichung zwischen den Messungen für jeden einzelnen Messpunkt auf der Platte berechnet. Diese Werte werden für alle Messpunkte gemittelt. Bei 34 Hz ist die so berechnete Standardabweichung der Amplitude $\sigma_{\text{Amplitude}} = 1,9989 \cdot 10^{-6}$ m und die Standardabweichung der Phase $\sigma_{\text{Phase}} = 0,5491^\circ$, die mittlere Verschiebungsamplitude beträgt $1,1254 \cdot 10^{-5}$ m, die maximale Verschiebung $3,3673 \cdot 10^{-5}$ m. Bei 74 Hz beträgt die mittlere Verschiebungsamplitude $3,8254 \cdot 10^{-5}$ m, die maximale Verschiebung $9,2208 \cdot 10^{-5}$ m, die Standardabweichung der Amplitude beträgt bei 74 Hz $\sigma_{\text{Amplitude}} = 2,7202 \cdot 10^{-6}$ m und die Standardabweichung der Phase $\sigma_{\text{Phase}} = 0,5938^\circ$.

Für beide Frequenzen ist festzustellen, dass die Standardabweichung der Amplitude nicht wesentlich kleiner ist als die mittlere Amplitude, was bedeutet, dass die Reproduzierbarkeit von Messergebnissen in der Nähe von Eigenfrequenzen nur bedingt möglich ist. Da das System schwach gedämpft ist ($\xi = 0,002$), bewirken kleine Änderungen in den Umgebungsbedingungen, wie z. B. eine leichte Temperaturänderung, eine Verschiebung der Eigenfrequenzen, was dann zu relativ großen Änderungen in der gemessenen Amplitude führt. Bei 30 direkt nacheinander durchgeführten Messungen (je 920 Messpunkte auf der Platte) beträgt die gesamte Messzeit mit dem Laservibrometer etwa 150 Minuten.

Die messtechnischen Abweichungen der betrachteten Größen zwischen den einzelnen Messpunkten auf der Platte beschreibt die Standardabweichung der Standardabweichung der Messpunkte. Bei 34 Hz wurde diese Auswertung für die ganze Plattenfläche durchgeführt, bei 74 Hz wurde nur ein konphaschwingender Bereich der 1-2-Mode auf der Platte betrachtet (siehe Abbildung 5.1). Die Standardabweichungen zwischen den Messpunkten für Amplitude und Phase betragen bei 34 Hz $\sigma_{\text{Amplitude}} = 1,5532 \cdot 10^{-12}$ m und $\sigma_{\text{Phase}} = 0,1423^\circ$ und bei 74 Hz $\sigma_{\text{Amplitude}} = 6,9765 \cdot 10^{-12}$ m und $\sigma_{\text{Phase}} = 0,1049^\circ$. (Mit dem Scanning-Laservibrometer ist es laut dem Hersteller POLYTEC [19] möglich, Verschiebungen im Pikometer-Bereich (10^{-12} m) aufzuzeichnen. Demnach sind die Werte der gemessenen Streuungen bei diesen Frequenzen realistisch.) Im Rahmen einer Messung an allen Punkten auf der Platte ist der Fehler in der Amplitude vernachlässigbar, da dessen mittlere Standardabweichung 6 Größenordnungen unter der mittleren Amplitude liegt. Auch die mittlere Standardabweichung der Phase zwischen den Messpunkten ist mit Werten von $0,1049^\circ$ und $0,1423^\circ$ als sehr gering einzustufen. Mit dem Scanning-Laservibrometer kann demnach die Schwingung der Struktur sehr exakt erfasst werden.

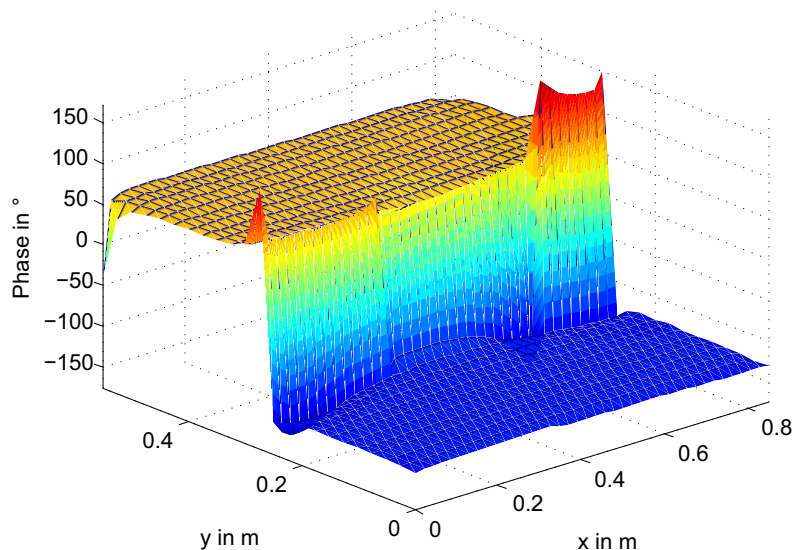


Abbildung 5.1: Experimentell bestimmte Phase bei 76 Hz (1-2-Mode)

Obwohl sowohl in der Amplitude als auch in der Phase der Verschiebung keine Messfehler erkennbar sind, was zudem durch die eben beschriebene statistische Untersuchung der Messungen bestätigt wird, ist der aus diesen Daten berechnete Verlauf der STI (Abbildung 5.2) stark verrauscht und damit fehlerbehaftet. Der STI-Verlauf ist farbig mit der Divergenz der STI hinterlegt.

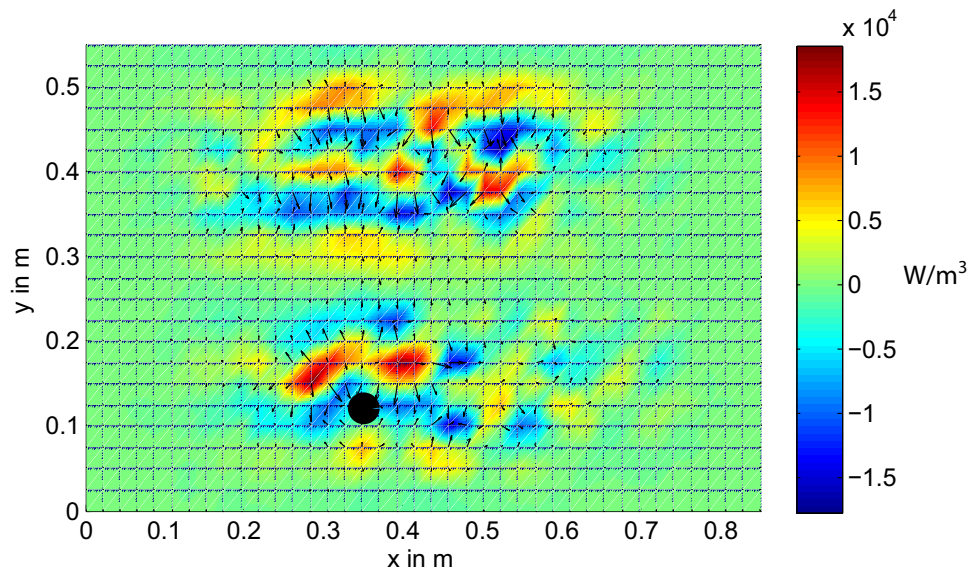


Abbildung 5.2: Experimentell bestimmter STI-Verlauf bei 76 Hz (1-2-Mode)

Die Wirbelstrukturen, die bei dieser Mode auftreten sollten (vgl. Abbildung 3.5 auf S. 31) können in dem aus Messdaten berechneten STI-Verlauf in Abbildung 5.2 nicht reproduziert werden. Aus der Divergenz der STI wird deutlich, dass aufgrund der fehlerbehafteten Berechnung der STI Scheinquellen und Scheinsenken auf der Struktur entstehen, die in dieser Form nicht existieren. Die einzige Quelle sollte die mit dem schwarzen Punkt markierte Krafteinleitungsstelle sein. Es fällt zudem auf, dass der STI-Verlauf im Bereich des Phasensprungs (siehe Abbildung 5.1) besser dargestellt wird als in Bereichen nahezu konstanter Phase. Daher ist der STI-Verlauf in der 1-1-Mode (kein Phasensprung) noch stärker gestört, was durch einen Vergleich von Abbildung 5.3 mit Abbildung 3.2 unten (siehe S. 27) deutlich wird.

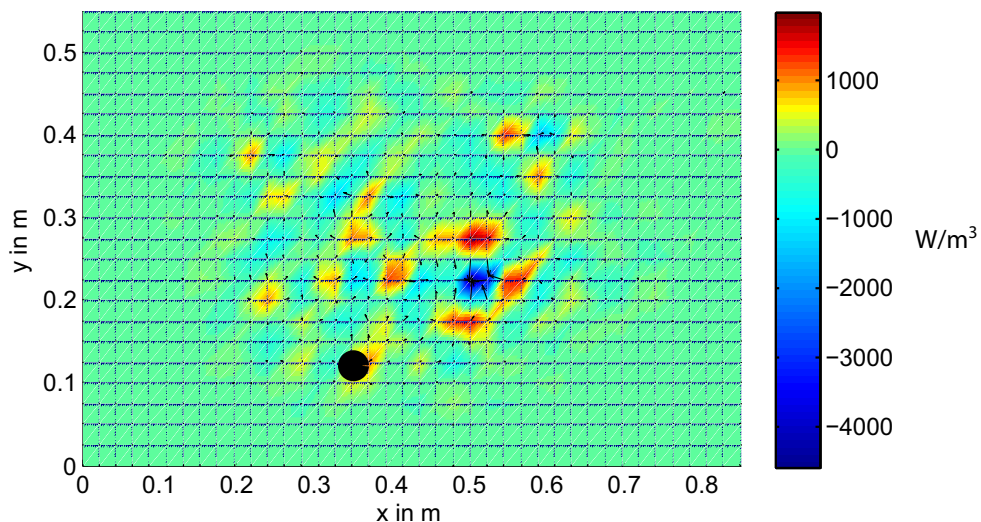


Abbildung 5.3: Experimentell bestimmter STI-Verlauf bei 31 Hz (1-1-Mode)

Der Phasenunterschied der komplexen Verschiebungen zwischen den Messpunkten spielt bei der Berechnung der STI eine tragende Rolle. Liegen auf der Struktur große Bereiche vor, die gleichphasig

schwingen, wie es zum Beispiel bei der 1-1-Mode oder der 1-2-Mode der Fall ist, so wirken sich kleinste Phasenabweichungen aus Messfehlern in diesen Bereichen sehr stark negativ auf den berechneten Verlauf der STI aus. Im Bereich großer Phasengradienten (Phasensprünge um 180°), spielen die Messfehler in der Phase keine Rolle mehr, da sie sehr klein im Vergleich zur gesamten Phasenänderung sind. Daher ist der STI-Verlauf bei höheren Moden deutlich besser erkennbar als bei niedrigen Moden, da sich wesentlich mehr Phasensprünge auf der Struktur befinden und damit die zusammenhängend gleichphasig schwingenden Bereiche klein werden. Eine deutliche Verbesserung des STI-Verlaufs ist demnach bei höheren Moden zu erwarten, was durch das Beispiel in Abbildung 5.4 bestätigt wird. Die Abbildung zeigt den aus einer Messung berechneten STI-Verlauf bei 221 Hz (4-5-Mode), bei dem sowohl das Wirbelmuster fehlerfrei dargestellt wird als auch die Quelle durch die Divergenz der STI deutlich sichtbar wird.

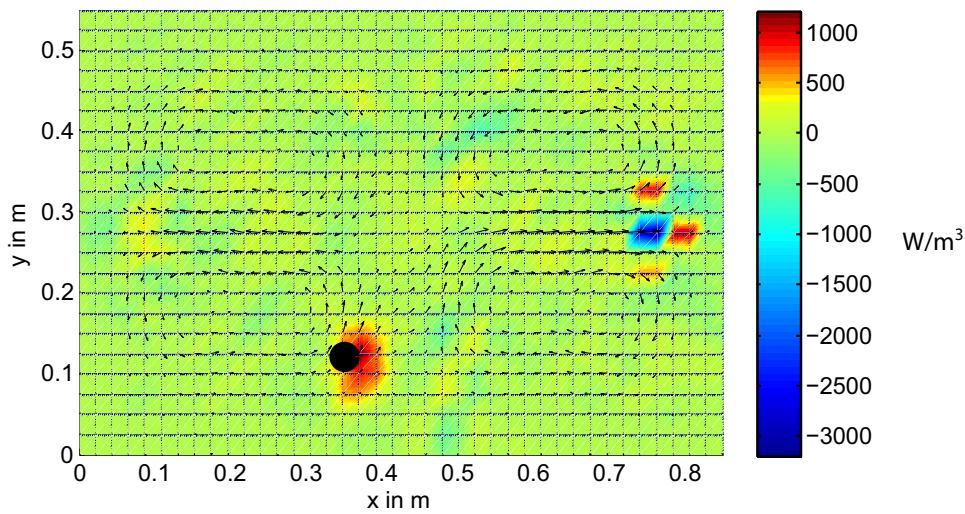


Abbildung 5.4: Experimentell bestimmter STI-Verlauf bei 221 Hz (4-3-Mode)

Die in den Versuchen ermittelten Werte für den Messfehler zwischen den Messpunkten (Standardabweichung der Streuung) der Phase und der Amplitude zwischen den einzelnen Punkten auf der Struktur werden ebenfalls in der Simulation verwendet, um die berechneten Verschiebungsgrößen mit einer Streuung mit identischer Standardabweichung zu versehen. Auf diese Weise konnten die im Experiment beobachteten Fehler im Verlauf der STI nahezu identisch reproduziert werden. Ergebnisse dieser numerischen Simulationen werden im Anhang A.3 gezeigt.

5.2 Verbesserung der STI-Berechnung durch die Anwendung eines Mittelungsverfahrens

Da trotz mehrfacher Mittelung der Lasermessungen der STI-Verlauf bei niedrigen Frequenzen fehlerbehaftet ist, müssen in diesem Bereich die gemessenen Daten für alle Punkte auf der Platte zusätzlich mittels eines Mittelungsfilters gefiltert werden, um die STI korrekt berechnen zu können. Das Filter wird auf die komplexen Geschwindigkeits- oder Verschiebungsdaten angewendet und ersetzt den originalen Wert in einem Punkt (r_i, s_i) durch die Mittelung dieses Punktes mit den acht umliegenden Punkte $r_{i-1} \leq r_i \leq r_{i+1}$ und $s_{i-1} \leq s_i \leq s_{i+1}$. Dadurch wird vor allem die Phase der Messwerte, die von höchster Wichtigkeit für die Berechnung der STI ist, geglättet. Prinzipiell ist es möglich, auch weiter entfernt

liegende Punkte in die Mittelung mit einzubeziehen sowie die abgeleiteten Verschiebungsgrößen (siehe STI-Berechnungsgleichungen (3.28), (3.29)) weiter zu mitteln. Beide Möglichkeiten führen jedoch zu zunehmend größer werdenden quantitativen Fehlern bei der Berechnung der STI, wobei erwähnt werden muss, dass der Verlauf sehr gut dargestellt wird.

In weiteren Untersuchungen wird das Mittelungsverfahren nicht auf die Verschiebungen, sondern direkt auf den Betrag und den Winkel der STI-Vektoren angewendet. Dies führt, verglichen mit der direkten Mittelung der komplexen Verschiebungsgrößen, ebenfalls zu deutlich schlechteren Ergebnissen. Die Ergebnisse dieser Untersuchung werden in Abschnitt 5.2.3 dargestellt.

Ein Vergleich zwischen ungefilterten und gefilterten Daten ist in den Abbildungen 5.5 links und rechts zu sehen. Die STI-Vektoren sind durch Pfeile dargestellt, die Kraftanregung ist mit einem Kreis markiert. Die Divergenz der STI ist für bessere Vergleichbarkeit der Abbildungen mit dem jeweils maximalen Wert normalisiert und als farbiger Hintergrund dargestellt. Die Abmessungen sind ebenfalls der Darstellung wegen mit den Abmessungen der Platte in x - und y -Richtung normiert.

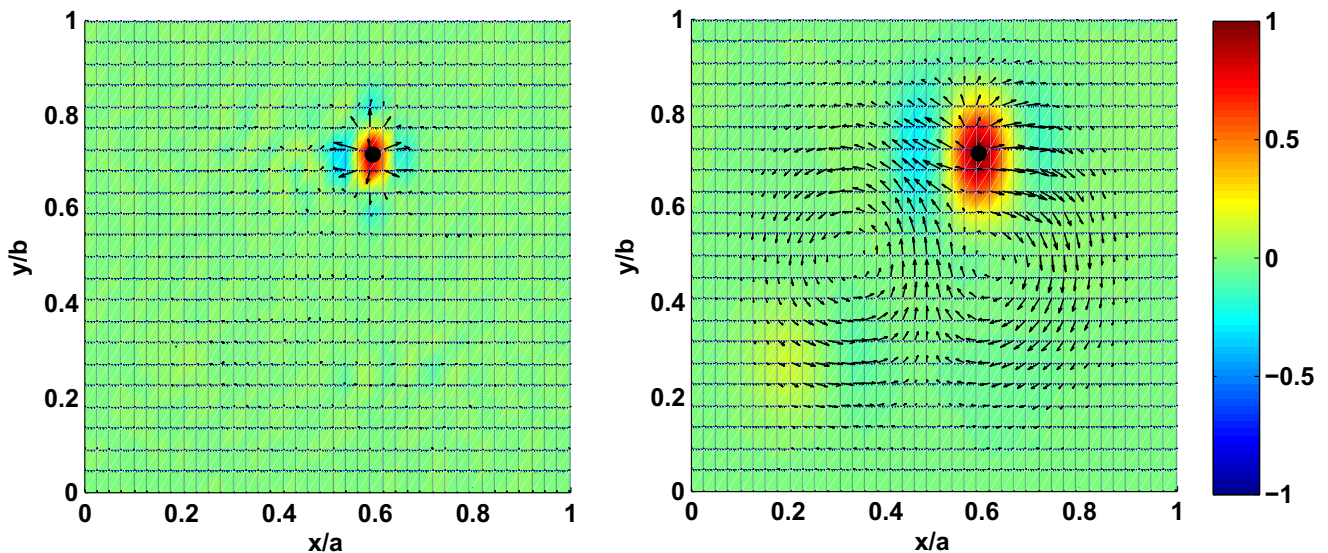


Abbildung 5.5: STI berechnet aus gemessenen Daten (76 Hz, 1-2-Mode) ohne Filterung (links) und mit Filterung (rechts)

In den Abbildungen 5.5 links und rechts ist die Quelle (roter Bereich) jeweils eindeutig zu sehen. Ohne Filterung ist der Verlauf des Energieflusses auf der Platte jedoch nicht erkennbar. Mit Filterung ergeben sich deutlich sichtbare Verläufe. Der rote Bereich um die Quelle wird aber etwas verschmiert, wodurch die Quelle in der rechten Abbildung nicht mehr so exakt wie in Abbildung 5.5 links lokalisiert werden kann.

5.2.1 Kriterien zur Bewertung der STI-Berechnung aus gemittelten Verschiebungsdaten

Durch die Anwendung der Mittelung auf die komplexen Verschiebungsdaten wird die Datenbasis, die der STI-Berechnung zu Grunde liegt, verfälscht. Da die STI-Berechnung aus nicht gefilterten Werten ab einer gewissen Frequenz (d. h. Mode mit ausreichend großer Anzahl an Phasengradienten) ebenfalls zu guten

Ergebnissen führt, muss aufgezeigt werden, bis zu welcher Frequenz die STI-Berechnung aus gemittelten Werten besser ist als die aus nicht gemittelten Werten berechnete STI. Als Bewertungsgrößen dient zum einen der Winkel des Richtungsvektors des Realteils der STI, da dieser maßgebend für die Darstellung sowie für die Berechnung von Leistungsgrößen auf Basis der STI ist. Zum anderen wird der Betrag des Realteils des STI-Vektors als Bewertungsmaß herangezogen sowie der Betrag und der Winkel des Imaginärteils der STI. Für die Bewertung des Mittelungsverfahrens wird die STI in der numerischen Simulation auf drei unterschiedlichen Wegen berechnet:

- aus nicht veränderten numerisch berechneten Originaldaten ($\mathbf{I}'_{\text{original}}$)
- aus numerisch berechneten Daten mit künstlich aufgebrachter Streuung ($\mathbf{I}'_{\text{gestreut}}$)
- aus numerisch berechneten Daten mit künstlich aufgebrachter Streuung und anschließender Mittelung ($\mathbf{I}'_{\text{gemittelt}}$)

Der Betrag sowie die Richtung des Realteils der STI berechnen sich aus den STI-Komponenten I'_x (Gleichung (3.28)) und I'_y (Gleichung (3.29)) zu

$$|\text{Re}\{I'\}| = \sqrt{\text{Re}\{I_x'^2\} + \text{Re}\{I_y'^2\}}, \quad (5.1)$$

$$\angle \text{Re}\{I'\} = \arctan \frac{\text{Re}\{I_y'\}}{\text{Re}\{I_x'\}}. \quad (5.2)$$

Die Berechnung des Betrags und des Winkels für den Imaginärteil der STI erfolgt durch Ersetzen der Realteile der STI durch die entsprechenden Imaginärteile.

Die zur Bewertung benötigten Fehler des Betrags der STI ϵ_{Betrag} berechnen sich aus der Differenz zwischen der STI, berechnet aus gestreuten und anschließend gemittelten Verschiebungen ($\mathbf{I}'_{\text{gemittelt}}$) und der STI aus nicht veränderten Daten ($\mathbf{I}'_{\text{original}}$) sowie der Differenz zwischen der STI aus gestreuten Verschiebungen ($\mathbf{I}'_{\text{gestreut}}$) und nicht veränderten Daten ($\mathbf{I}'_{\text{original}}$).

$$\epsilon_{\text{Betrag, gemittelt}} = \left| \left| \mathbf{I}'_{\text{gemittelt}} \right| - \left| \mathbf{I}'_{\text{original}} \right| \right|, \quad (5.3)$$

$$\epsilon_{\text{Betrag, gestreut}} = \left| \left| \mathbf{I}'_{\text{gestreut}} \right| - \left| \mathbf{I}'_{\text{original}} \right| \right|, \quad (5.4)$$

Zur Berechnung des Winkelfehlers der STI ϵ_{Winkel} werden die Differenzen der Winkel der STI zusätzlich mit dem normalisierten Betrag der STI gewichtet, um den Einfluss betragsmäßig kleiner STI-Vektoren, die vor allem in den Randbereichen der Platte auftreten und deren Winkel zum Teil erheblich vom Sollwert abweichen, auf die Bewertung zu verringern. Zudem wird im Folgenden immer der Betrag des Winkelfehlers betrachtet:

$$\epsilon_{\text{Winkel, gemittelt}} = \left| \left(\angle \mathbf{I}'_{\text{gemittelt}} - \angle \mathbf{I}'_{\text{original}} \right) \right| \cdot \frac{|\mathbf{I}'_{\text{gemittelt}}|}{\max |\mathbf{I}'_{\text{gemittelt}}|}, \quad (5.5)$$

$$\epsilon_{\text{Winkel, gestreut}} = \left| \left(\angle \mathbf{I}'_{\text{gestreut}} - \angle \mathbf{I}'_{\text{original}} \right) \right| \cdot \frac{|\mathbf{I}'_{\text{gestreut}}|}{\max |\mathbf{I}'_{\text{gestreut}}|}. \quad (5.6)$$

Auf eine explizite Unterscheidung zwischen Real- und Imaginärteil wurde in diesen Gleichungen verzichtet. Die Fehler nach den Gleichungen (5.3) bis (5.6) werden aber jeweils für den Realteil und den Imaginärteil der STI berechnet. Für diese Ergebnisse werden wiederum der Mittelwert μ und die Standardabweichung σ berechnet, sodass man insgesamt acht Bewertungsgrößen erhält.

5.2.2 Bestimmung des Fehlers der STI-Berechnung mit Mittelungsverfahren

In diesem Abschnitt wird der Phasenwinkel der komplexen Verschiebung in der Simulation künstlich mit einer Streuung mit Mittelwert Null und der Standardabweichung der Phase von $0,1049^\circ$ (entspricht der in der Messung ermittelten Standardabweichung zwischen zwei Messpunkten) beaufschlagt. Da die ermittelte Streuung der Amplitude keine maßgebende Auswirkung auf das Ergebnis der STI-Berechnung hat (siehe Abschnitt 5.2.3), wird der Betrag der Verschiebung nicht manipuliert, um die Abweichungen durch Phasenfehler allein bewerten zu können. Der Mittelwert und die Standardabweichung der Fehler des Betrages und des Winkels der STI-Vektoren (vgl. Gleichungen (5.3) bis (5.6)) werden im Frequenzbereich bis 750 Hz berechnet. Diese Größen werden über alle Punkte auf der Platte gemittelt. Die Abbildung 5.6 zeigt die Mittelwerte der Betragsfehler des Realteils der STI. Die zahlreichen Spitzen der Fehler fallen mit den Eigenfrequenzen der Platte zusammen.

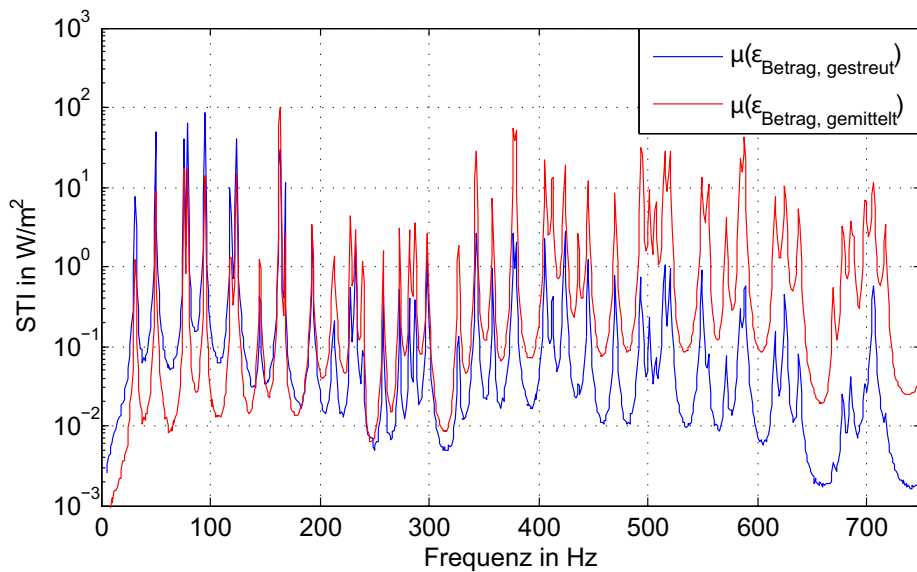


Abbildung 5.6: Mittlere Fehler $\epsilon_{\text{Betrag, gestreut}}$ und $\epsilon_{\text{Betrag, gemittelt}}$ der Realteile der STI

Aus Abbildung 5.6 wird deutlich, dass der Mittelwert des Fehlers $\epsilon_{\text{Betrag, gemittelt}}$ des Realteils der STI bis etwa 145 Hz (achte Eigenfrequenz) kleiner ist als der Mittelwert des Fehlers $\epsilon_{\text{Betrag, gestreut}}$. Wie später gezeigt wird (siehe Abbildung 5.9 auf S. 57) ist der relative Betragsfehler $\epsilon_{\text{Betrag, gemittelt}}$ in diesem Frequenzbereich immer noch größer als 50 %. Bei 145 Hz ist der Fehler durch die Mittelung erstmals größer als bei der STI berechnet aus gestreuten Daten. In Antiresonanzen weist die STI aus gemittelten Daten bis etwa 200 Hz einen geringeren Fehler auf, was aber eine eher untergeordnete Rolle spielt. Zu höheren Frequenzen hin nimmt der Fehler $\epsilon_{\text{Betrag, gemittelt}}$ im Verhältnis zum Fehler der STI aus nicht gemittelten Daten $\epsilon_{\text{Betrag, gestreut}}$ stetig zu. Der Verlauf der Standardabweichung beider Fehler (Abbildung A.4 im Anhang) ist nahezu identisch mit dem Verlauf der in Abbildung 5.6 gezeigten Mittelwerte. Wie der entsprechende Mittelwert ist die Standardabweichung des Fehlers $\epsilon_{\text{Betrag, gemittelt}}$ bis etwa 145 Hz (achte Eigenfrequenz) geringer als die Standardabweichung des Fehlers $\epsilon_{\text{Betrag, gestreut}}$ (Abbildung A.4). Die Standardabweichung beider Fehler ist von derselben Größenordnung wie die mittleren Fehler. Das bedeutet, dass der Betragsfehler auf der Struktur stark variiert.

Steht der Verlauf der STI in der Struktur im Vordergrund der Untersuchung, ist der Winkelfehler des Realteils des STI-Vektors (Gleichungen (5.5) und (5.6)) die wichtigere Kenngröße. In den Abbildungen 5.7 und 5.8 werden die Verläufe des Mittelwertes und der Standardabweichung der Winkelfehler, die gemittelten Fehlergrößen (gestrichelt) sowie die Eigenfrequenzen (senkrechte schwarze Striche) dargestellt. Die gestrichelten Linien zeigen den gleitenden Mittelwert der entsprechenden Größen.

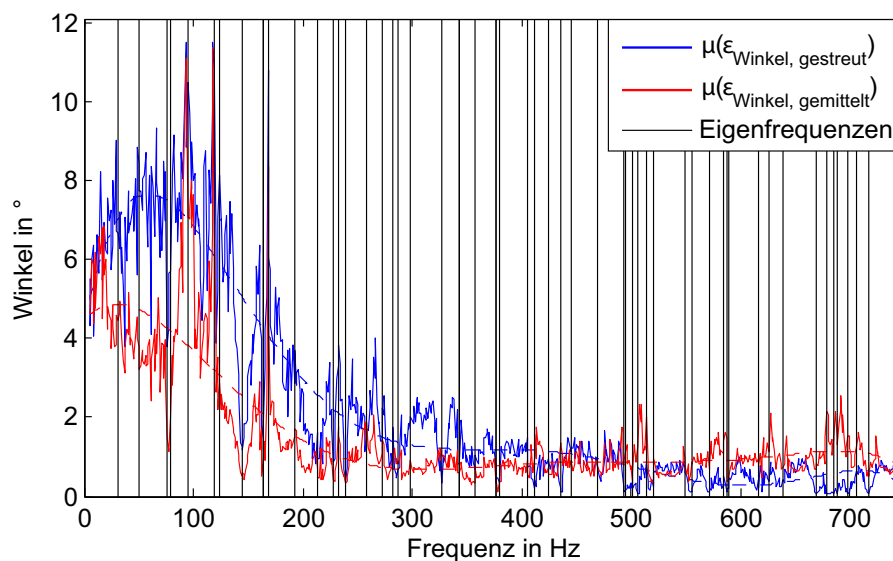


Abbildung 5.7: Mittlere Fehler $\epsilon_{\text{Winkel, gestreut}}$ und $\epsilon_{\text{Winkel, gemittelt}}$ der Realteile der STI

Die Abbildung 5.7 zeigt, dass der Mittelwert des Winkelfehlers $\epsilon_{\text{Winkel, gemittelt}}$ aufgrund der Anwendung des Mittelungsverfahrens bis etwa 475 Hz geringer ist als der Mittelwert des Fehlers $\epsilon_{\text{Winkel, gestreut}}$. Auch die Standardabweichung der Winkelfehler in Abbildung 5.8 zeigt dieses Verhalten. Zu beachten ist, dass die Standardabweichung der Winkelfehler immer größer ist als die Mittelwerte der Winkelfehler. Es liegt also eine große Streuung des Winkelfehlers auf der Struktur vor.

In den Abbildungen 5.7 und 5.8 fällt auf, dass im Bereich zwischen etwa 90 Hz und 120 Hz der Mittelwert des Winkelfehlers $\epsilon_{\text{Winkel, gemittelt}}$ trotz Mittelung nur wenig kleiner und die Standardabweichung

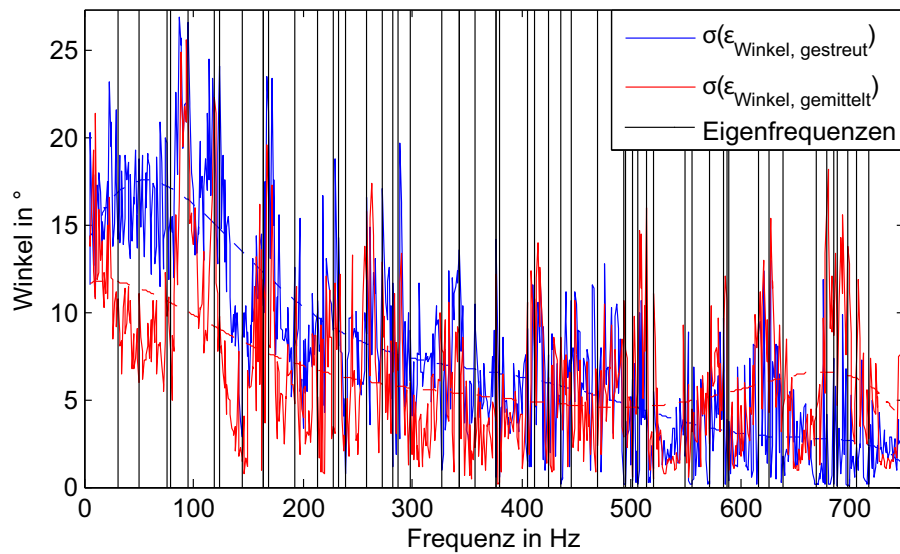


Abbildung 5.8: Standardabweichung der Fehler $\epsilon_{\text{Winkel, gestreut}}$ und $\epsilon_{\text{Winkel, gemittelt}}$ der Realteile der STI

sogar etwas größer ist als die entsprechenden Werte des Fehlers $\epsilon_{\text{Winkel, gestreut}}$. Da die Eigenfrequenzen in diesem Bereich nicht genau mit den Fehlermaxima zusammenfallen, beeinflusst dieses Phänomen aufgrund der sehr großen Steigung der Fehlerkurve die Ergebnisse nur unwesentlich. In den direkt an diesen Bereich angrenzenden Eigenfrequenzen sind sowohl der Mittelwert als auch die Standardabweichung der Winkeldifferenz aufgrund der Mittelung deutlich geringer als ohne Mittelung, was aufgrund der sehr großen Steilheit des Kurvenverlaufs allerdings schwer zu erkennen ist.

Die Abbildungen 5.5, 5.6 und 5.7 zeigen, dass die Ergebnisse der Berechnung des Betrags und des Winkels der STI durch den Einsatz des Mittelungsfilters wesentlich verbessert werden konnten. Die Ergebnisse dieser verbesserten STI-Berechnung sollten dennoch nur für qualitative Analysen verwendet werden. Für eine quantitative Auswertung der STI sind die Ergebnisse für Frequenzen kleiner als 400 Hz nur bedingt geeignet, da der Fehler immer noch größer als 10 % ist. Abbildung 5.9 visualisiert die relativen Fehler des Betrages der STI $\epsilon_{\text{Betrag, gestreut}}$ und $\epsilon_{\text{Betrag, gemittelt}}$.

Im Frequenzbereich bis 145 Hz wird mit dem Mittelungsfiler eine Reduktion des Fehlers auf ein Zehntel erreicht. Aus Abbildung 5.9 wird aber auch deutlich, dass der verbleibende quantitative Fehler trotz Anwendung des Mittelungsverfahrens zwischen 10 % und 100 % (erste Eigenfrequenz $f_{1,1}$) liegt. Im quasistatischen Bereich unterhalb der ersten Eigenfrequenz ($f_{1,1}$), der für dynamische Untersuchungen keine Rolle spielt, steigt der relative Fehler auf Werte bis zu 1000 %. Da aber der Fehler des Richtungswinkels der STI auf weniger als 4° reduziert werden kann, wirkt sich der Betragsfehler der STI nicht negativ auf die Bewertung des Verlaufs der STI auf der Struktur aus.

Die Anwendung des Mittelungsverfahrens zur Berechnung des Imaginärteils der STI führt im Vergleich zur Berechnung der STI aus gestreuten Daten immer zu größeren Fehlern und ist daher nicht sinnvoll. Je nachdem, ob für eine Untersuchung der Betrag der STI oder der Verlauf der STI (Winkel) die wichtigere Größe ist, müssen die gemessenen Daten wie beschrieben gemittelt werden. Bezogen auf den Betrag der STI ist eine Mittelung im Fall der betrachteten Platte nur bis etwa 123 Hz sinnvoll, wobei für eine

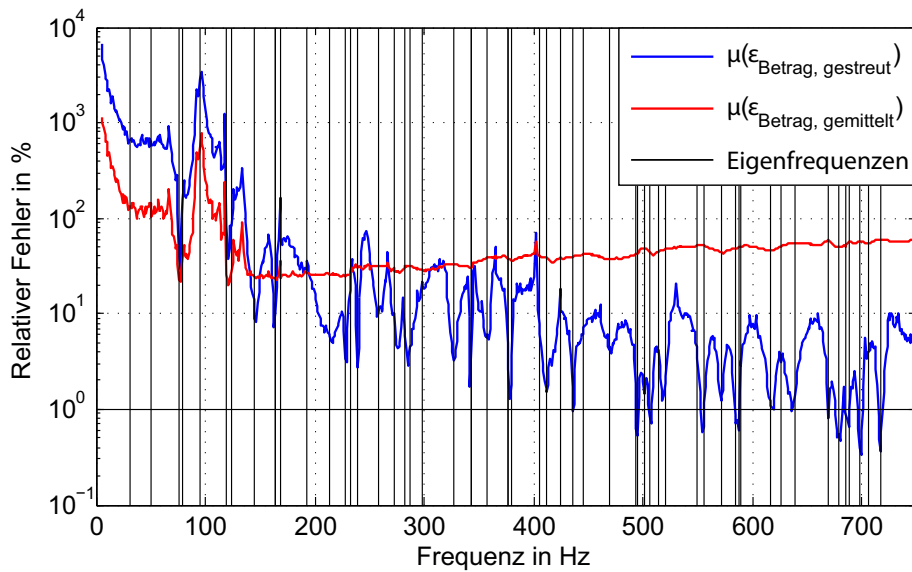


Abbildung 5.9: Mittlere Fehler $\epsilon_{\text{Betrag, gestreut}}$ und $\epsilon_{\text{Betrag, gemittelt}}$ der Realteile der STI

Verbesserung des Verlaufs der STI die Mittelung bis zu einer Frequenz von 475 Hz verwendet werden sollte.

5.2.3 Anwendung des Mittelungsverfahrens bei variierender Standardabweichung des Messfehlers

Im Unterschied zu den Simulationen aus dem vorhergehenden Abschnitt wird nun neben der Frequenz auch die Streuung des Betrages oder der Phase der Verschiebungen variiert. Der Mittelwert μ und die Standardabweichung σ der Fehler (Gleichungen (5.3) bis (5.6)) werden für den Realteil und den Imaginärteil der STI berechnet. Ziel dieser Untersuchung ist es zu zeigen, welche Verbesserungen zum einen durch die Mittelung der Verschiebungen bei größer werdendem Fehler der Phase möglich sind. Zum anderen wird bestätigt, dass selbst eine große Streuung im Betrag der Verschiebungen nicht zu erheblichen Fehlern bei der Berechnung der STI führt. Des Weiteren kann gezeigt werden, dass eine Mittelung des Betrages und des Winkels der STI-Vektoren im Vergleich zur Mittelung der Verschiebungen zu schlechteren Ergebnissen führt. Der Fehler der STI mit gemitteltem Betrag und Winkel des STI Vektors wird analog zu den Gleichungen (5.3) und (5.5) berechnet und mit $\epsilon_{\text{Betrag, Betrag und Winkel gemittelt}}$ bzw. $\epsilon_{\text{Winkel, Betrag und Winkel gemittelt}}$ bezeichnet. Aufgrund des hohen Rechenaufwandes, der durch die Variation der Standardabweichung des Betrages oder der Phase der Verschiebungen entsteht, wurde die STI nur in den Eigenfrequenzen der Struktur berechnet. Für eine übersichtlichere, zweiachsige Darstellung wurden im Folgenden die Ergebnisse, die sich durch die Variation des Betrages oder der Phase des Schwingweges ergeben, über die betrachteten Frequenzen im Bereich von 0 Hz bis 500 Hz gemittelt.

Die Mittelwerte der Fehler des Winkels des Realteils der STI in Abhängigkeit von der Streuung der Amplitude der Verschiebung sind in Abbildung 5.10 dargestellt.

Nach der Mittelung der Verschiebungen sowie alternativ des Betrages und des Winkels der STI-Vektoren sind in beiden Fällen die Fehler $\epsilon_{\text{Winkel, gemittelt}}$ und $\epsilon_{\text{Winkel, Betrag und Winkel gemittelt}}$ immer größer als die Fehler der gestreuten Daten $\epsilon_{\text{Winkel, gestreut}}$. Eine größer werdende Streuung des Betrages der

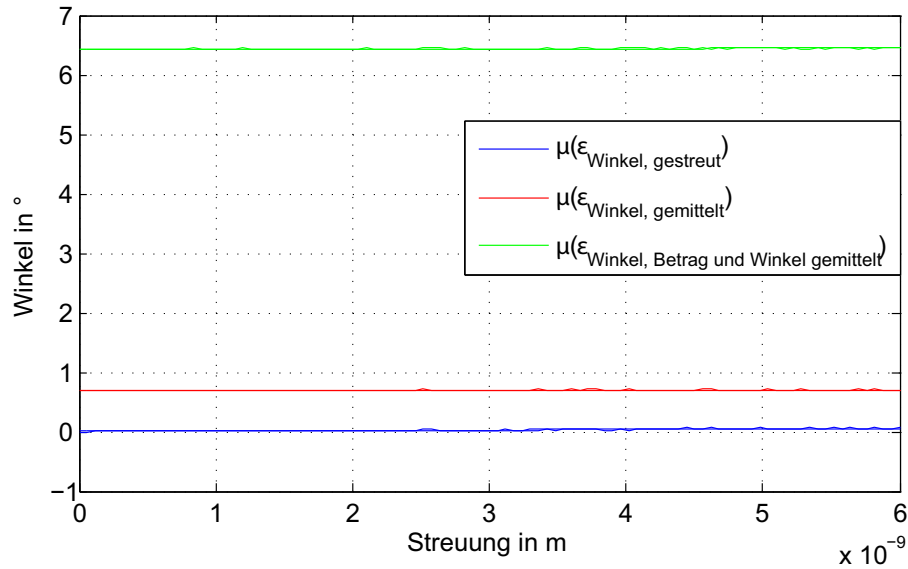


Abbildung 5.10: Mittlere Fehler $\epsilon_{\text{Winkel, gestreut}}$, $\epsilon_{\text{Winkel, gemittelt}}$ und $\epsilon_{\text{Winkel, Betrag und Winkel gemittelt}}$ der Realteile der STI in Abhängigkeit von der Streuung des Betrages der Verschiebung

Verschiebungen hat demnach nur geringe Auswirkungen auf den Betrag und den Winkel des STI-Vektors. Selbst wenn eine im Vergleich zur Messung um den Faktor 100 größere Standardabweichung von $\sigma = 7 \cdot 10^{-10}$ m angenommen wird, beträgt der Fehler für den Winkel des Realteils der STI $\epsilon_{\text{Winkel, gestreut}}$ $0,028^\circ$ und für den Betrag des Realteils der STI $0,0034 \text{ W/m}^2$. Im Gegensatz dazu beträgt der Betrag der STI gemittelt über die Plattenfläche und alle Frequenzen etwa $0,5 \text{ W/m}^2$. Die Abbildung der Mittelwerte der Betragsfehler zeigt Abbildung A.5 im Anhang. Weitere Grafiken (Standardabweichung, Imaginärteil der STI) mit verändertem Betrag der Verschiebung werden hier nicht gezeigt, da sie in diesem Zusammenhang keine zusätzlichen Informationen geben.

Im Gegensatz zum Fehler des Betrages hat der Phasenfehler der Verschiebungen deutliche Auswirkungen auf das Ergebnis der STI-Berechnung. Die Abbildung 5.11 zeigt den Mittelwert der Fehler $\epsilon_{\text{Betrag, gestreut}}$, $\epsilon_{\text{Betrag, gemittelt}}$ und $\epsilon_{\text{Betrag, Betrag und Winkel gemittelt}}$ des Realteils der STI in Abhängigkeit von der Streuung des Phasenwinkels der Verschiebungen. Die Intensität der unveränderte Originaldaten (I_{original}) beträgt in den Eigenfrequenzen im betrachteten Frequenzbereich im Mittel 300 W/m^2 . Verglichen mit Abbildung 5.6 sind die Fehler der folgenden Abbildungen wesentlich größer, da die Standardabweichung des Fehlers bewusst sehr groß gewählt wurde. Dennoch belegen die Abbildungen 5.11 und 5.12 das Verbesserungspotenzial, das durch die Verwendung des Filters gegeben ist.

Wie erwartet, nimmt der Mittelwert der Fehler mit steigender Streuung des Phasenwinkels der Verschiebung zu (Abbildung 5.11). Eine Mittelung des Betrages und des Winkels des STI-Vektors führt nicht zu einer Verbesserung der Werte ($\epsilon_{\text{Betrag, Betrag und Winkel gemittelt}}$). Das mit Abstand beste Ergebnis auch bei großen Fehlern des Phasenwinkels der Verschiebung liefert die Mittelung der Verschiebungsdaten ($\epsilon_{\text{Betrag, gemittelt}}$). Beträgt die Streuung mehr als etwa $0,02^\circ$, so liefert die STI berechnet aus der gemittelten Verschiebung im Frequenzmittel das beste Ergebnis für den Betrag des Realteils der STI. Für kleinere Streuungen ist es also besser, mit den Originaldaten zu arbeiten, falls diese Größe im Mittelpunkt der Betrachtungen steht. Der Phasenfehler des verwendeten Laservibrometers liegt bei etwa $0,11^\circ$, sodass es

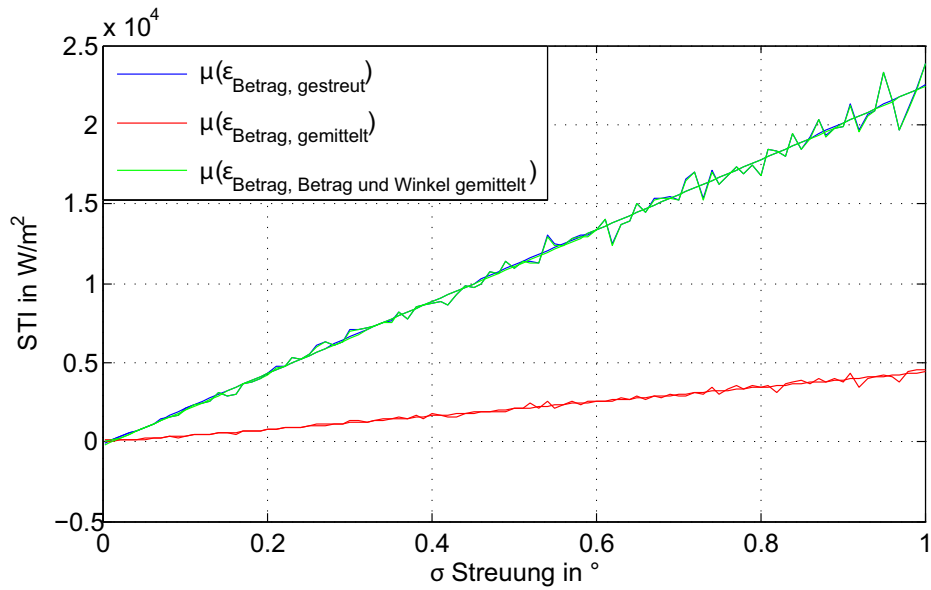


Abbildung 5.11: Mittlere Fehler $\epsilon_{\text{Betrag, gestreut}}$, $\epsilon_{\text{Betrag, gemittelt}}$ und $\epsilon_{\text{Betrag, Betrag und Winkel gemittelt}}$ der Realteile der STI in Abhängigkeit von der Streuung des Phasenwinkels der Verschiebung

sinnvoll ist, mit gemittelten Daten zu arbeiten. Zu beachten sind bei der Mittelung allerdings die Ergebnisse bezüglich der Frequenzgrenzen für die Mittelung, die im vorherigen Abschnitt bestimmt wurden.

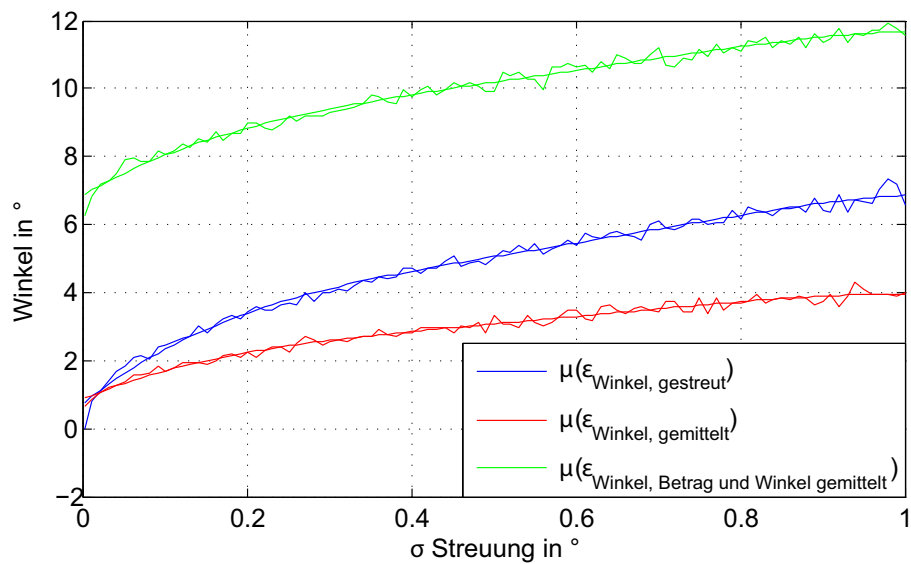


Abbildung 5.12: Mittlere Fehler $\epsilon_{\text{Winkel, gestreut}}$, $\epsilon_{\text{Winkel, gemittelt}}$ und $\epsilon_{\text{Winkel, Betrag und Winkel gemittelt}}$ der Realteile der STI in Abhängigkeit von der Streuung des Phasenwinkels der Verschiebung

Die Auswirkungen des Phasenfehlers auf den Winkel des Realteils der STI, also auf den Verlauf der STI in der Struktur, werden in Abbildung 5.12 dargestellt. Für größer werdende Phasenfehler der Verschiebung nehmen die Winkelfehler gemittelt über die Platte und die Frequenz stark zu. Auch in diesem Fall führt die Mittelung der Verschiebungsdaten ($\epsilon_{\text{Winkel, gemittelt}}$) zu besseren Ergebnissen als eine Mittelung des Betrages und des Winkels der STI-Vektoren ($\epsilon_{\text{Winkel, Betrag und Winkel gemittelt}}$). Der Mittelwert des Fehlers

$\epsilon_{\text{Winkel, gemittelt}}$ des Realteils der STI ist für eine Standardabweichung des Phasenfehlers von mehr als etwa $0,02^\circ$ kleiner als der Fehler der nicht gemittelten Daten ($\epsilon_{\text{Winkel, gestreut}}$). Da der Winkel des Realteils der STI sowohl für die Darstellung der STI als auch für die Berechnung der Leistung aus der STI sehr wichtig ist, sollte aufgrund des bekannten Fehlers der Laservibrometermessung oder bei größeren Messfehlern eine frequenzabhängige Mittelung der gemessenen Ausgangsdaten vorgenommen werden. Die Standardabweichungen der Fehler weisen ein ähnliches Verhalten auf wie die gezeigten Mittelwerte und werden daher im Anhang (Abbildungen A.6 und A.7) dargestellt.

Liegt der Fokus der Auswertung auf dem Imaginärteil der STI, sollte auf die Mittelung der Verschiebungen oder die Mittelung des Betrages und des Winkels der Imaginärteile der STI-Vektoren verzichtet werden. Die Abbildung 5.13 macht deutlich, dass die Veränderung dieser Daten in allen Fällen zu größeren Fehlern führt als das Weiterrechnen mit den fehlerbehafteten Daten. Beispielhaft sind die Mittelwerte der Fehler des Winkels des Imaginärteils der STI dargestellt. Die Mittelwerte der Fehler des Betrages des Imaginärteils der STI und die entsprechenden Standardabweichungen werden in Abbildung A.8 im Anhang gezeigt.

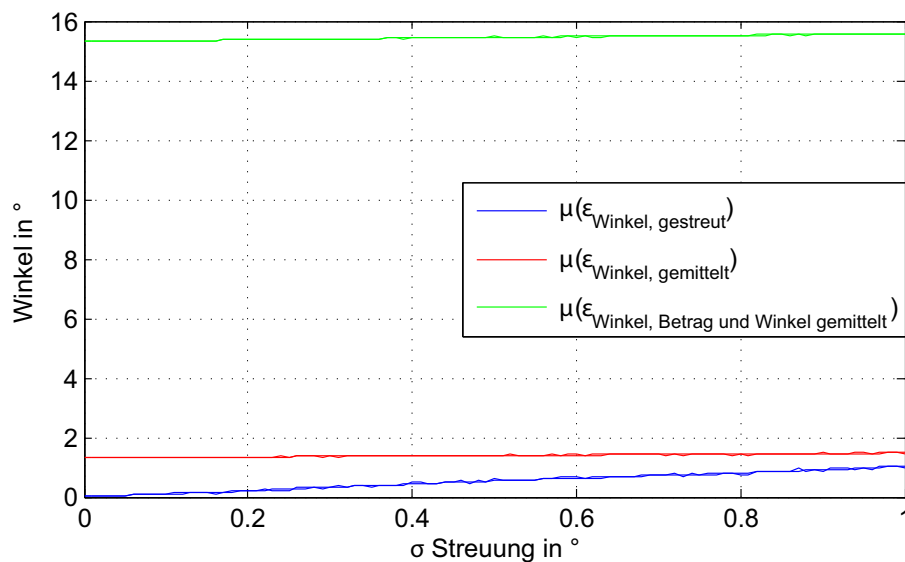


Abbildung 5.13: Mittlere Fehler $\epsilon_{\text{Winkel, gestreut}}$, $\epsilon_{\text{Winkel, gemittelt}}$ und $\epsilon_{\text{Winkel, Betrag und Winkel gemittelt}}$ der Imaginärteile der STI in Abhängigkeit von der Streuung des Phasenwinkels der Verschiebung

5.3 Verallgemeinerung der Ergebnisse für Rechteckplatten verschiedener Geometrien

Die in den vorherigen Abschnitten vorgestellten Ergebnisse gelten streng genommen nur für die verwendete Rechteckplatte mit den Abmessungen $850 \text{ mm} \times 550 \text{ mm} \times 1,5 \text{ mm}$ und der Kraftanregungsstelle bei $x = 350 \text{ mm}$ und $y = 120 \text{ mm}$. Mit dem analytischen Plattenmodell können die Frequenzgrenzen, bis zu denen die Mittelung sinnvoll ist, für verschiedene Geometrien einer Rechteckplatte mit variierendem Anregungsort bestimmt werden. Da das Plattenmodell keine allgemeinen Geometrien wie Krümmungen oder Änderungen der Dicke zulässt, ist dies nur ein erster Schritt zur Verallgemeinerung der Ergebnisse.

Mit Hilfe einer Monte-Carlo-Simulation werden die Auswirkungen verschiedener Seitenverhältnisse der Rechteckplatte und unterschiedlicher Anregungsorte auf die Frequenzgrenzen, bis zu denen die Mittelung sinnvoll ist, untersucht. Das Seitenverhältnis a/b der Rechteckplatte variiert zwischen 0,15 und 1, die Shakerposition zwischen $(0,05 \dots 0,5) \cdot a$ und $(0,05 \dots 0,5) \cdot b$. Zur besseren Vergleichbarkeit der Ergebnisse beträgt die Plattenfläche immer 1 m^2 . Die parametrisierten Abmessungen werden in Abbildung 5.14 gezeigt.

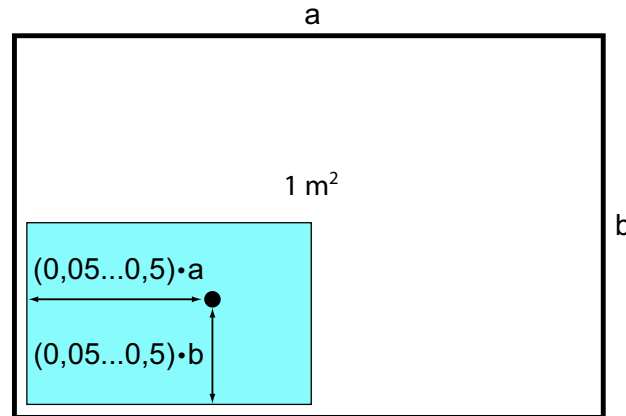


Abbildung 5.14: Parametrisierte Abmessungen der Platte, der Shaker (Kreis) wird parameterabhängig innerhalb der türkisen Fläche platziert

Der beschriebene Parameterraum wird mit insgesamt 400 Simulationen abgedeckt, die Schnittpunkte (Frequenzen, bis zu denen die Mittelung sinnvoll ist) werden im Frequenzbereich bis 8000 Hz gesucht. Die Frequenzen f_s , an denen sich die Fehler $\epsilon_{\text{Betrag, gemittelt}}$ und $\epsilon_{\text{Betrag, gestreut}}$ schneiden, sind für den Realteil der STI in Abhängigkeit vom Seitenverhältnis der Platte in Abbildung 5.15 dargestellt. Die Frequenzen f_s sind auf die erste Eigenfrequenz $f_{1,1}$ für das entsprechende Seitenverhältnis bezogen.

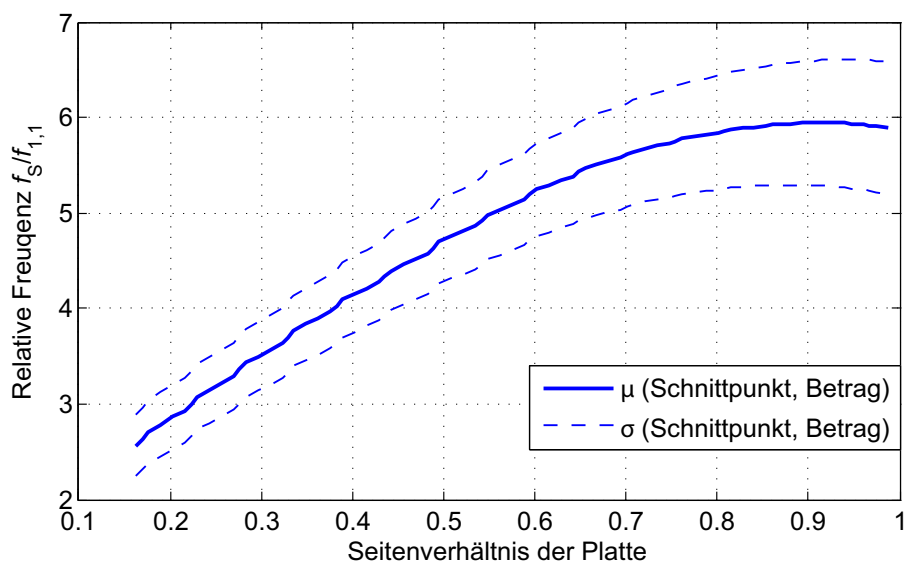


Abbildung 5.15: Schnittpunkte des Fehlers $\epsilon_{\text{Betrag, gestreut}}$ mit dem Fehler $\epsilon_{\text{Betrag, gemittelt}}$ der Realteile der STI in Abhängigkeit vom Seitenverhältnis der Platte

In Abbildung 5.15 ist zu erkennen, dass für den Betrag des Realteils der STI die relative Frequenz $f_s/f_{1,1}$ für größer werdende Seitenverhältnisse der Platte ansteigt. Für sehr schmale Rechteckplatten liegt der Schnittpunkt etwa beim dreifachen der ersten Eigenfrequenz, für quadratische Platten beim sechsfachen der ersten Eigenfrequenz. Die Streuung resultiert aus der Variation der Anregungsposition. Die Schnittpunkte für den Winkel des STI-Vektors sind für den Realteil der STI in Abhängigkeit vom Seitenverhältnis der Platte in Abbildung 5.16 dargestellt.

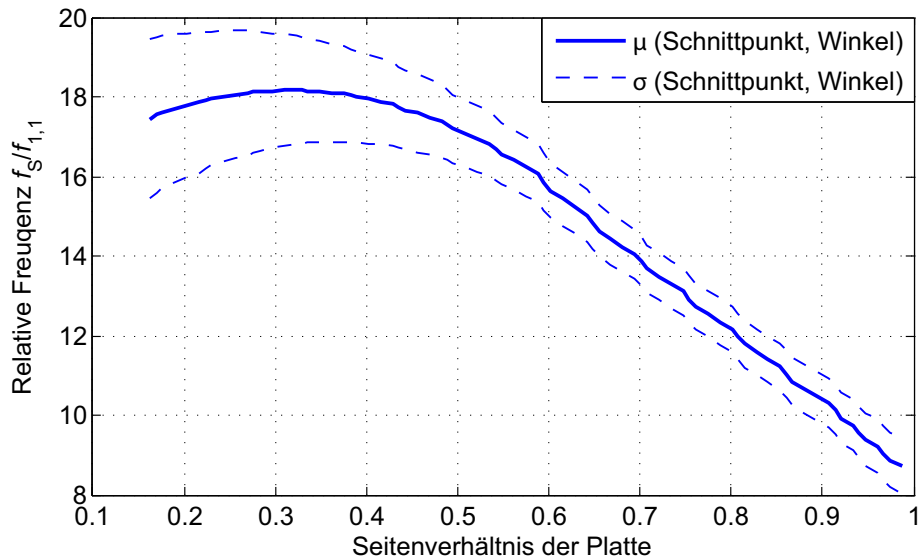


Abbildung 5.16: Schnittpunkte des Fehlers $\epsilon_{\text{Winkel, gestreut}}$ mit dem Fehler $\epsilon_{\text{Winkel, gemittelt}}$ der Realteile der STI in Abhängigkeit vom Seitenverhältnis der Platte

Aus dieser Abbildung wird deutlich, dass die Frequenzgrenze, bis zu der die Mittelung sinnvoll ist, für größer werdende Seitenverhältnisse abnimmt. Für sehr schmale Platten mit kleinem Seitenverhältnis liegt der Schnittpunkt der Fehler $\epsilon_{\text{Winkel, gestreut}}$ und $\epsilon_{\text{Winkel, gemittelt}}$ bei etwa dem 18-fachen der ersten Eigenfrequenz. Für quadratische Platten befindet sich der Schnittpunkt nur noch beim neunfachen der ersten Eigenfrequenz. Die Streuung nimmt für größer werdende Seitenverhältnisse ab.

Das Seitenverhältnis der in dieser Arbeit verwendeten Platte liegt bei $\frac{0,55 \text{ m}}{0,85 \text{ m}} \approx 0,65$. Damit ergibt sich aus Abbildung 5.15 für den Betrag der STI unter Verwendung des Mittelwertes der Schnittpunkt bei $f_s = f_{1,1} \cdot 5,4 = 31 \text{ Hz} \cdot 5,5 \approx 167 \text{ Hz}$. Der Schnittpunkt für den Winkel des STI-Vektors berechnet sich analog mit Hilfe von Abbildung 5.16 zu 460 Hz. Beide Werte stimmen sehr gut mit den in Abschnitt 5.2.2 bestimmten Schnittpunkten überein.

Zur weiteren Verallgemeinerung der Ergebnisse des Abschnittes 5.3 sind zusätzliche Untersuchungen (z. B. eine Sensitivitätsanalyse) unter Einbeziehung gekrümmter Strukturen nötig, die allerdings mit einem Finite-Elemente-Programm durchgeführt werden sollten.

Wenn die Oberflächengeschwindigkeit (Beschleunigung, Verschiebung) gemessen wird, um anschließend die STI aus den Messdaten zu bestimmen, müssen die komplexen Geschwindigkeiten so exakt wie möglich gemessen werden. In diesem Kapitel konnte gezeigt werden, dass die auf einem Messraster experimentell bestimmten Geschwindigkeiten (alternativ Verschiebungen) einer Streuung unterliegen und

daher, wie in diesem Kapitel beschrieben, einer Mittelung unterzogen werden müssen, um Fehler bei der Berechnung der STI aus diesen Daten zu minimieren. Die beschriebenen Phasenfehler treten auf, wenn sich beispielsweise aufgrund von kleinen Änderungen in den Umgebungsbedingungen die Eigenfrequenzen während einer Messung leicht verschieben. Falls die aus den gemessenen Daten berechnete STI Fehler aufweist, wie beispielsweise in Abbildung 5.2 gezeigt, und keine weitere Reduktion der Fehler der Messdaten möglich ist, sollte eine Filterung der Daten, wie in diesem Abschnitt beschrieben, durchgeführt werden. Zu beachten ist, dass diese Mittelung nur bis zu einer strukturabhängigen Frequenzgrenze sinnvoll ist, da für größere Frequenzen der Fehler durch das Mittelungsverfahren größer ist als das Rechnen mit den unveränderten Messdaten. Obwohl damit eine exakte quantitative Auswertung der STI für niedrige Frequenzen (in dieser Untersuchung für Frequenzen kleiner 400 Hz) noch immer nicht möglich ist, ermöglicht das Mittelungsfilter eine qualitative Analyse der STI auf der Struktur. Die mittleren Fehler des Winkels des STI-Vektors können durch das Mittelungsfilter auf weniger als 4° reduziert werden. Somit wird der Verlauf der STI auf der Struktur sehr exakt dargestellt.

6 Berechnung der Leistung aus der Strukturintensität

In Kapitel 4 wurde ein Verfahren zur Berechnung der STI gefunden, das geeignet ist, die STI quantitativ zu berechnen. Der Einfluss von Messungenauigkeiten auf die Bestimmung der STI wurde untersucht und die STI-Berechnung aus Messdaten erheblich verbessert (Kapitel 5). Aufbauend auf diesen Ergebnissen kann nun die Leistung aus der Strukturintensität berechnet werden, die beispielweise Aktoren eines aktiven Systems der Struktur zuführen oder die durch einen Dämpfungsbelag zur passiven Schwingungsminderung dissipiert wird. Die Leistung wird mit geschlossenen Integralen um Quellen und Senken aus dem Energiefluss berechnet. Die wesentlichen Einflussfaktoren auf die Berechnung der Leistung aus der STI werden mit einer Sensitivitätsanalyse bestimmt. Der Einfluss der identifizierten Faktoren auf die Leistungsberechnung wird in numerischen und experimentellen Simulationen weiter untersucht, als Referenz dient die analytische Lösung der zugeführten Leistung. Aus diesen Untersuchungen ergibt sich ein von der Diskretisierung der Struktur abhängiger optimaler Abstand des Integrals von der Quelle. Für diesen Abstand wird der Fehler der Leistungsberechnung minimal.

Die Grundlagen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und zu den Berechnungsmethoden der Sensitivitätsanalyse befinden sich im Anhang A.6.

6.1 Numerische Berechnung des STI-Inegrals

Die zugeführte Leistung, die als Referenzgröße für die aus der STI mittels Integration berechnete Leistung verwendet wird, ergibt sich bei punktförmiger Kraftanregung mit der Kraft F und der konjugiert komplexen Schwinggeschwindigkeit im Kraftangriffspunkt v^* zu

$$P_{\text{zu}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{F \cdot v^*\}. \quad (6.1)$$

Da die Leistung, die z. B. ein Piezopatch dem System zuführt oder ein Dämpfungsbelag dem System entzieht, nicht ohne Weiteres bestimmt werden kann, wird ein geschlossenes Integral um den Aktor zur Berechnung der Leistung verwendet. Um aus dem Energiefluss durch die Begrenzung eines Kontrollvolumens die Leistung P zu berechnen, kann allgemein das Ringintegral

$$P_{\text{Integral}} = \oint_0^{2\pi r} I' \cdot \mathbf{n} h \, dS \quad (6.2)$$

gebildet werden. Der Normalenvektor \mathbf{n} steht senkrecht auf der Begrenzungslinie, h ist die Dicke der Struktur. Da bei numerischen und experimentellen Simulationen die Geschwindigkeiten, aus denen die STI berechnet wird, meist auf einem rechteckigen Raster vorliegen, wird eine rechteckige Begrenzung des Kontrollvolumens verwendet. Mit den x - und y -Komponenten der STI berechnet sich die Leistung nach der Mittelpunktregel näherungsweise zu

$$P_{\text{STI-numerisch}} = (-I_{x,\text{links}} + I_{x,\text{rechts}})h\Delta y + (-I_{y,\text{unten}} + I_{y,\text{oben}})h\Delta x \quad (6.3)$$

$I_{x,\text{links}}, I_{x,\text{rechts}}, I_{y,\text{unten}}$ und $I_{y,\text{oben}}$ sind die mit der Mittelpunktsregel numerisch berechneten Intensitätsflüsse durch die entsprechenden Seiten des Kontrollvolumens mit den Kantenlängen Δx und Δy . Da die STI nur an diskreten Punkten auf dem Gitter vorliegt, kann gezeigt werden, dass bei gleichbleibendem Gitter sowohl die Trapezregel als auch die Simpsonregel für diesen Fall auf die Mittelpunktsregel zurückführbar sind. Eine höhere Genauigkeit in der Integration kann erreicht werden, wenn die für die Trapez- und Simpsonregel zusätzlichen benötigten Punkte ebenfalls gemessen werden und damit das Gitter verfeinert wird.

Alternativ kann die dem System zugeführte Leistung auch berechnet werden, indem die Divergenz der STI (Gleichung (3.36)) mit der Fläche, für die die Leistung ermittelt werden soll, multipliziert wird

$$P_{\text{DIV}} = \int_V \nabla \cdot I \, dV = \nabla \cdot I \cdot h \cdot \Delta x \cdot \Delta y. \quad (6.4)$$

Die Abmessungen des Bereichs, in dem die Leistung berechnet werden soll und in dessen Zentrum sich die Quelle befindet, werden mit Δx und Δy angegeben, h ist die Dicke der Struktur. Da zur Berechnung der Divergenz der STI eine weitere numerische Ableitung nötig ist, kann angenommen werden, dass die Ergebnisse der Leistungsberechnung mit dem geschlossenen Integral exakter sind.

6.2 Analytische Berechnung der zugeführten Leistung

Eine analytische Lösung des STI-Integrals ist für die gelenkig gelagerte KIRCHHOFF-Platte prinzipiell möglich, aufgrund der Komplexität der Lösung jedoch nicht in der Praxis anwendbar. Ein Ansatz zur analytischen Lösung des STI-Integrals wird im Anhang A.5 gezeigt. Für die betrachtete Plattenstruktur bietet sich ein alternativer Lösungsansatz basierend auf der Lagrange-Gleichung an. Liegen keine gyrokopischen Terme vor und kennt man den Schwingungszustand des Systems (was bei der analytischen Berechnung der Platte der Fall ist), kann mit der Lagrange-Funktion L die Bewegungsgleichung aus der kinetischen Energie T (Gleichung (3.34)) und potenziellen Energie U (Gleichung (3.35)) formuliert werden. Aus der mit der Geschwindigkeit \dot{x} multiplizierten Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + d\dot{x} + kx &= F \quad | \cdot \dot{x} \\ \Rightarrow m\ddot{x}\dot{x} + d\dot{x}\dot{x} + kx\dot{x} &= F\dot{x} \end{aligned} \quad (6.5)$$

mit der Masse m , der Dämpfungskonstante d , der Steifigkeit k und der Kraft F ergibt sich unter Verwendung von

$$m\ddot{x}\dot{x} = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad \text{und} \quad kx\dot{x} = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} k x^2 \quad (6.6)$$

die Lagrangegleichung zu

$$\frac{d}{dt}(T + U) = F\dot{x} - d\dot{x}\dot{x} \quad (6.7)$$

mit $L = T + U$.

Die Dämpfungskonstante d kann aus dem Dämpfungsgrad D berechnet werden

$$d = 2m\omega D. \quad (6.8)$$

Da für den stationären Zustand die Zeitableitung in Gleichung (6.7) gemittelt über eine Periode 0 wird, muss die rechte Seite von Gleichung (6.7) ebenfalls 0 ergeben. Bei realen Systemen wird ein Großteil der Dämpfung über die Randeinspannung in das System eingebracht. In der numerischen Simulation ist zur Vereinfachung die Dämpfung gleichmäßig über die Platte verteilt. Wird nun ein geschlossenes Integral um eine Quelle (oder Senke) betrachtet, so schließt dieses Integral eine bestimmte Fläche A_I ein. Berechnet man mittels Integration aus der STI die zugeführte Leistung, so entspricht der Fehler der Integration der in dieser Teilfläche der Platte dissipierten Leistung. Für die numerische Berechnung dieses Integrals ist es nötig, den Integrationsbereich in einem gewissen Abstand von der Quelle zu legen und damit automatisch einen Fehler bei der Leistungsberechnung zu machen. Zur Quantifizierung des Fehlers der numerischen Integration wird als Bezugsgröße an Stelle der analytischen Lösung des geschlossenen Integrals (Gleichungen (A.15), (A.16) im Anhang) die zugeführte Leistung abzüglich der im Integrationsbereich dissipierten Leistung verwendet. Aus Gleichung (6.7) ergibt sich mit der Integrationsfläche A_I (vom Integral eingeschlossenen Fläche) und der Gesamtfläche der Platte A_{Platte} :

$$\frac{d}{dt}(T + U) = F\dot{x} - d\dot{x}\dot{x} \cdot \frac{A_I}{A_{\text{Platte}}} \approx P_{\text{zu}} - P_{\text{diss}} = P_{\text{analytisch}}. \quad (6.9)$$

Betrachtet man die komplette Platte, so wird der Faktor $\frac{A_I}{A_{\text{Platte}}} = 1$, und die dissipierte Leistung entspricht der zugeführten Leistung. Da im analytischen Modell keine Energie über den Rand der Platte abfließt, wird damit der Energieerhaltungssatz (im eingeschwungenen Zustand) erfüllt. Für eine Teilfläche (Integrationsbereich A_I) ergibt sich die an dieser Stelle vorhandene, mittels Integral berechenbare zugeführte Leistung, d.h. die (mechanische) Eingangsleistung abzüglich der innerhalb des Integrationsbereiches dissipierten Leistung. Dieser Ansatz kann sowohl in numerischen als auch in experimentellen Simulationen als Referenz für die numerisch aus der STI berechnete Leistung verwendet werden, da mit Hilfe der Divergenz der STI gezeigt werden kann, dass die Dissipation innerhalb des Integrationsbereichs gleichmäßig verteilt ist.

Im eingeschwungenen Zustand liegt auf der Platte ein Körperschallfeld vor, der Integrationsbereich wird demnach von Wirbeln überlagert und durchströmt. Der Energieanteil, der den Integrationsbereich durchströmt, kürzt sich bei der Integration über den Rand des Integrationsbereichs heraus, da nur der Normalenanteil der STI in die Berechnung der Leistung einfließt. Der hier vorgeschlagene Ansatz für die analytische Lösung des Integrals berücksichtigt nur die im eingeschwungenen Zustand zugeführte

Leistung und nicht die Gesamtenergie, die im Körperschallfeld bei stationärer Energiezufuhr und Dissipation gespeichert ist. Demnach ist dieser Ansatz als Referenzgröße für die mittels Integration berechenbare zugeführte Leistung geeignet.

6.3 Bestimmung maßgebender Einflussfaktoren auf die Leistungsberechnung

Mit einer Sensitivitätsanalyse wird das analytische Modell der Platte hinsichtlich Parametereinflüssen auf das numerische Integral um die Anregungsstelle untersucht. Als Fehlermaße zur Bewertung der Parametereinflüsse stehen der absolute Fehler $\epsilon_{P_{\text{abs}}, \text{Int}}$ und der relative Fehler $\epsilon_{P_{\text{rel}}, \text{Int}}$, berechnet aus der Differenz zwischen der zugeführten Leistung P_{zu} (Gleichung (6.1)) und der mittels des geschlossenen Integrals um die Anregungsstelle aus der STI berechneten Leistung P_{Integral} (Gleichung (6.3)), zur Verfügung.

$$\epsilon_{P_{\text{rel}}, \text{Int}} = (P_{\text{zu}} - P_{\text{Integral}}) / P_{\text{zu}} \cdot 100\%, \quad (6.10)$$

$$\epsilon_{P_{\text{abs}}, \text{Int}} = P_{\text{zu}} - P_{\text{Integral}}. \quad (6.11)$$

Des Weiteren wird, wie beschrieben, die Leistung mit der Divergenz der STI berechnet. Die Fehlergrößen ergeben sich demnach zu

$$\epsilon_{P_{\text{rel}}, \text{DIV}} = (P_{\text{zu}} - P_{\text{DIV}}) / P_{\text{zu}} \cdot 100\%, \quad (6.12)$$

$$\epsilon_{P_{\text{abs}}, \text{DIV}} = P_{\text{zu}} - P_{\text{DIV}}. \quad (6.13)$$

Für die Sensitivitätsanalyse wird als Zielgröße der absolute Fehler verwendet, da vor allem in Antiresonanzen kleine Fehler zwischen der zugeführten Leistung P_{zu} und der mittels des geschlossenen Integrals um die Anregungsstelle aus der STI berechneten Leistung P_{Integral} zu extrem großen relativen Fehlern führen können, die infolge dessen das Ergebnis verfälschen.

6.3.1 Sensitivitätsanalyse am analytischen Plattenmodell

Der Einfluss verschiedener Parameter auf die Leistungsberechnung mittels STI-Integral wird im Folgenden mit einer Sensitivitätsanalyse untersucht. Die Parametereinflüsse bezüglich der gewählten Zielgrößen werden mit verschiedenen Effektgrößen (Haupteffekte und Totaleffekte) quantifiziert. Geht die Summe der Haupteffekte gegen 0, verhält sich das System nichtlinear bezüglich einer Zielgröße, geht sie gegen 1, verhält es sich linear. Im Unterschied zu den Haupteffekten beschreiben die Totaleffekte den Einfluss der Parameter auf die Ausgangsvarianz unter Berücksichtigung der Wechselwirkungseffekte zwischen verschiedenen Parametern. Anders als die Haupteffekte können die Totaleffekte auch größer als 1 werden. Weitere Grundlagen zur Sensitivitätsanalyse sind im Anhang A.6 zusammengefasst.

Im Folgenden werden nur die Ergebnisse der Berechnung unter Verwendung des Fehlers $\epsilon_{P_{\text{abs}}, \text{Int}}$ (Gleichung (6.11)) als Zielgröße gezeigt, die Simulation mit der Zielgröße $\epsilon_{P_{\text{abs}}, \text{DIV}}$ (Gleichung (6.13)) liefert nahezu identische Ergebnisse. Als Parameter werden die Dämpfung P_1 , der Integralabstand von der Quelle P_2 , die Kraftamplitude P_3 und die Stützstellenanzahl P_4 betrachtet.

In einer ersten Analyse wurden zudem die Frequenz und die Plattendicke als weitere Parameter verwendet. Das Ergebnis waren sehr kleine Haupteffekte aller Parameter in der Größenordnung 10^{-4} . Somit ist auch die Summe der Haupteffekte von derselben Größenordnung, was auf stark nichtlineares Verhalten bezüglich der Zielgröße schließen lässt. Die Totaleffekte waren aufgrund großer Nichtlinearitäten fehlerbehaftet. Da in der Sensitivitätsanalyse ein dynamisches Modell einer Platte verwendet wird, wirken sich die Parameter Frequenz und Plattendicke sehr stark nichtlinear auf die Zielgrößen aus. Die Übertragungsfunktion einer Platte ist in Abhängigkeit von der Frequenz stark nichtlinear, bei gleichbleibender Frequenz wirkt sich die Änderung der Plattendicke ebenfalls stark nichtlinear auf die Zielgröße aus, da sich die Eigenfrequenzen und damit die Übertragungsfunktion in Abhängigkeit von der Plattendicke verändern. Die Frequenz und die Dicke der Platte werden daher in der folgenden zweiten Analyse konstant gehalten.

In Tabelle 6.1 sind die Parameter P_k und ihre Wertebereiche aufgelistet, die für diese Analyse verwendet wurden. Zur Berechnung der Sensitivitätsmaße wurde eine Stichprobengröße $N = 16666$ festgelegt. Diese ergibt sich aus der gewählten Gesamtzahl der Modellsimulationen N_{sim} von rund 100000 und der Anzahl an untersuchten Parametern $k = 4$ nach dem Zusammenhang $N_{\text{sim}} = N \cdot (k + 2)$ [24]. Die STI wird analog zu den Messungen mittels Gradientenverfahren berechnet, um den Einfluss der Parameter auf das in Experimenten und numerischen Simulationen verwendete Verfahren zu untersuchen. Der Einfluss sehr geringer Netzdichten wurde hier nicht mit untersucht, da die Kombination aus sehr geringer Diskretisierung und sehr kleinem Integralabstand zum Abbruch der Simulation führt. In diesem Fall stehen zur Berechnung des numerischen Integrals nicht genügend Punkte auf der Struktur zur Verfügung.

Tabelle 6.1: Wertebereiche der Parameter

Nummer	Parameter	Wertebereich
P_1	Dämpfung	$10^{-5} - 10^{-3}$
P_2	Integralabstand	0,03 m – 0,16 m
P_3	Kraftamplitude	0,1 N – 5 N
P_4	Stützstellenanzahl	450 – 5000

Die Effektgrößen sowie die Korrelation zwischen den Parametern und der Zielgröße werden in Tabelle 6.2 gezeigt. Die Anregungsfrequenz beträgt 54,4 Hz und die Plattendicke 1,5 mm. In dieser Konfiguration entspricht 54,4 Hz der zweiten Eigenfrequenz der gelenkig gelagerten Platte. Die gelenkige Lagerung wird verwendet, um zur Kontrolle die analytische Lösung der STI berechnen zu können.

Die Effektgrößen der Haupt- und Totaleffekte in Tabelle 6.2 lassen auf einen großen Einfluss der Parameter P_2 (Integralabstand) und P_3 (Kraft) schließen. Die Werte der Haupteffekte deuten auf einen nichtlinearen Zusammenhang zwischen den Parametern und der Zielgröße hin. Da die Haupteffekte etwa halb so groß sind wie die Totaleffekte, besteht ein großer Einfluss auf die Zielgröße durch Wechselwirkungen zwischen den Parametern. Dass die Totaleffekte nach Sobol [66, 67] und Jansen [26] nahezu identisch sind, lässt auf eine gute Konvergenz der betrachteten Größen schließen. (Dass die Effektgrößen

Tabelle 6.2: Parameter, Effektgrößen und Korrelationen bei 100000 Rechnungen (Integral)

	Dämpfung	Integralabstand	Kraft	Stützstellen
Haupteffekt	0,0237	0,2775	0,2721	0,0679
Totaleffekt Jansen	0,0878	0,5558	0,5854	0,1759
Totaleffekt Sobol	0,0885	0,5557	0,5822	0,1774
Korrelation	−0,0368	0,5227	0,5016	−0,2001

konvergieren, wird in Abschnitt 6.3.2 gezeigt.) Auch die Korrelationen zwischen den Parametern P_2 und P_3 und der Zielgröße (0,5227 und 0,5016) deuten auf einen wesentlichen Einfluss des Integralabstands und der Anregungskraft auf die Zielgröße hin.

6.3.2 Untersuchung der Konvergenz der betrachteten Parameter

Zur Überprüfung der Vertrauenswürdigkeit der Ergebnissen einer varianzbasierten Sensitivitätsanalyse hat HAN [24] ein Verfahren zur quantitativen Berechnung des Konvergenzfehlers entwickelt. Eine vorhandene Stichprobe der Größe N wird in m Substichproben der Größe N_i unterteilt, zu denen jeweils eine eigene Sensitivitätsanalyse durchgeführt wird. Es gilt

$$i = 1, 2, \dots, m \text{ und } N_1 < N_2 < N_m < N_{m+1} = N . \quad (6.14)$$

Für alle Substichproben und alle Parameter werden die Sensitivitätsmaße für die Haupteffekte $S_{H_{k,i}}$ und die Totaleffekte $S_{T_{k,i}}$ berechnet. Die Konvergenzfehler des Haupteffektes $\epsilon_{H_{k,i}}$ und des Totaleffektes $\epsilon_{T_{k,i}}$ werden aus den Ergebnissen der Sensitivitätsanalysen der Substichproben berechnet [24]:

$$\epsilon_{H_{k,i}} = \sup \left| S_{H_{k,i}} - \sup_j \left| S_{H_{k,i}} - S_{H_{k,j}} \right| \right| , \quad (6.15)$$

$$\epsilon_{T_{k,i}} = \sup \left| S_{T_{k,i}} - \sup_j \left| S_{T_{k,i}} - S_{T_{k,j}} \right| \right| , \quad (6.16)$$

$$\text{mit } i = 1, 2, \dots, m \text{ und } j \in \{i - 5, i - 4, \dots, i - 1, i + 1, i + 2, \dots, m + 1\} . \quad (6.17)$$

Für die Sensitivitätsmaße $S_{H_{k,i}}$ und $S_{T_{k,i}}$ wird der maximale Betrag der Differenz $\epsilon_{H_{k,i}}$ und $\epsilon_{T_{k,i}}$ zu den ermittelten Werten bei allen größeren und den vier nächstkleineren Stichproben bestimmt. Damit ein für alle k Parameter vergleichbares quantitatives Maß zur Verfügung steht, wird der absolute Fehler berücksichtigt. Das so von HAN [24] definierte Fehlermaß strebt gegen Null, wenn die bei größer werdenden Stichproben ermittelten Sensitivitätsmaße gegen einen konstanten Wert konvergieren. Aus Gleichungen (6.15) bis (6.17) lassen sich durch Mittelung über alle k Parameter die skalaren Fehlermaße ϵ_{H_i} für den Haupteffekt

$$\epsilon_{H_i} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \epsilon_{H_{j,i}} \quad (6.18)$$

und ϵ_{T_i} für den Totaleffekt

$$\epsilon_{T_i} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \epsilon_{T_{j,i}} \quad (6.19)$$

in einem zuvor definierten Intervall bestimmen.

Für die zweite vorgestellte Sensitivitätsanalyse am analytischen Modell der Platte werden für alle Stichproben die Sensitivitätsmaße für alle Parameter P_1 bis P_4 bestimmt. Abbildung 6.1 zeigt den Verlauf des Konvergenzfehlers der Haupteffekte aller Parameter ohne Mittelung. Die logarithmische Skalierung der y-Achse ermöglicht eine sehr genaue Darstellung des Konvergenzfehlers, erweckt aber den Anschein, dass der Fehler nicht gegen einen konstanten Wert konvergiert. Zu beachten ist weiterhin, dass der Fehler absolut dargestellt ist und Werte von weniger als 10^{-3} einen Fehler darstellen, der um ein bis zwei Größenordnungen kleiner ist als die Effektgrößen der Haupteffekte in Tabelle 6.2.

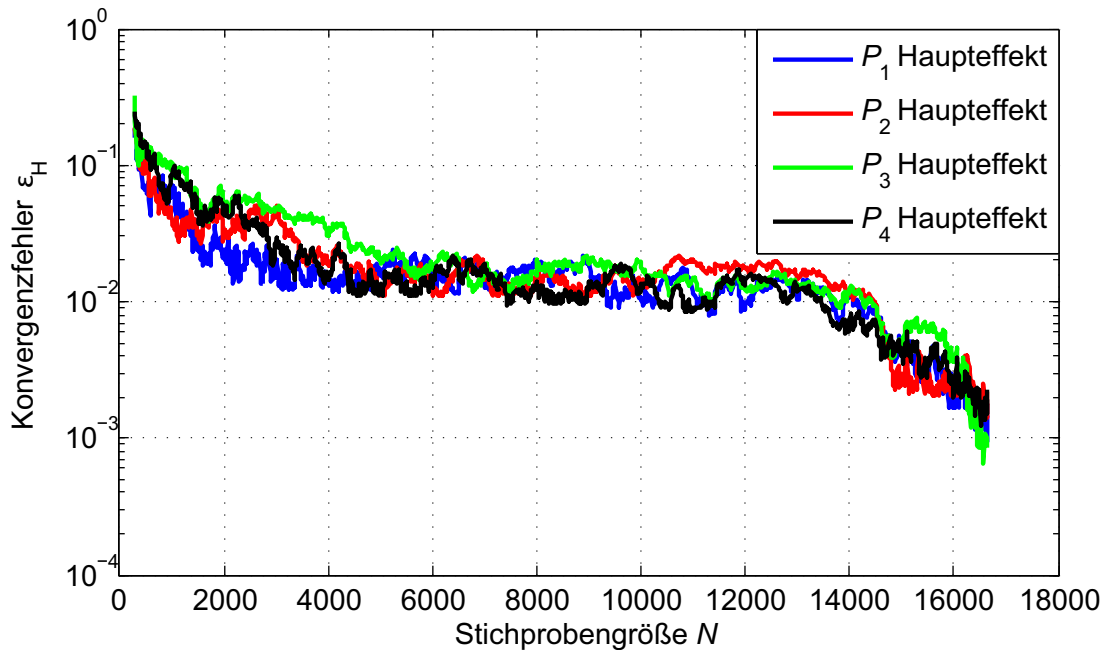


Abbildung 6.1: Konvergenzfehler der Haupteffekte aller Parameter

In Abbildung 6.2 sind die über alle Parameter gemittelten Totaleffekte nach Jansen und Sobol dargestellt. Aus dieser Abbildung wird deutlich, dass der Fehler am Ende der Rechnung für den Totaleffekt, berechnet mit dem Jansen-Schätzer, geringer ist als der Fehler des Sobol-Schätzers. Dies deckt sich mit den Ergebnissen der Untersuchungen von HAN [24].

Da die Konvergenz der Haupteffekte und Totaleffekte aller Parameter stetig fallend verläuft, ist auch bei einer deutlich größeren Anzahl von Simulationen keine wesentliche Veränderung der Effektgrößen

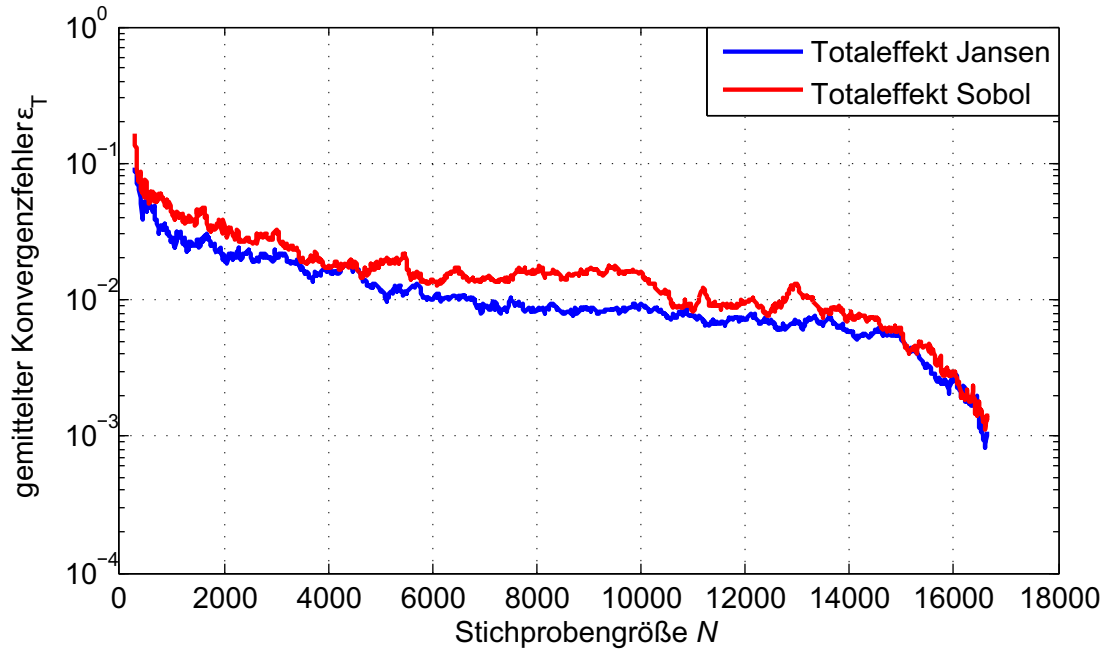


Abbildung 6.2: Konvergenzfehler gemittelt über die Totaleffekte nach Sobol und Jansen aller Parameter

zu erwarten. Die verwendete Stichprobengröße von $N = 16666$ ist demnach mehr als ausreichend. Auch mit einer kleineren Stichprobengröße von beispielsweise $N = 8000$ hätte ein sehr gutes Ergebnis erzielt werden können. Für diesen Fall läge der Konvergenzfehler im Bereich von 10^{-2} und wäre somit immer noch mindestens eine Größenordnung kleiner als die Effektgrößen.

6.3.3 Einfluss der Frequenz auf die Berechnung der Effektgrößen

In der Sensitivitätsanalyse mit fester Frequenz ging die Frequenz nicht als Parameter in die Rechnung ein, um den nichtlinearen Einfluss der Frequenz auf die Zielgrößen zu vermeiden. Der Einfluss der Frequenz kann dennoch untersucht werden, indem mehrere Sensitivitätsanalysen bei jeweils unterschiedlichen, festen Frequenzen, durchgeführt werden, sodass der für die Untersuchung relevante Frequenzbereich abgedeckt wird. Um die Rechenzeit zu verkürzen, werden die Simulationen nur in den Eigenfrequenzen und in den Antiresonanzen durchgeführt. Im Frequenzbereich bis 500 Hz ergeben sich damit 79 Frequenzstützstellen, an denen je eine Sensitivitätsanalyse durchgeführt wird. Da die im vorherigen Abschnitt beschriebene Sensitivitätsanalyse mit fester Frequenz mit 100000 Simulationen auf einem Rechnerserver etwa 4 Tage Rechenzeit beansprucht, muss bei der Untersuchung mehrerer Frequenzen die Anzahl der Simulationen pro Frequenz deutlich reduziert werden. Mit 2000 Simulationen bei 79 Frequenzstützstellen müssen immer noch 158000 Simulationen durchgeführt werden. Die Simulationszeit beträgt somit etwa 6 Tage. Mit $N_{\text{sim}} = 2000$ Modellsimulationen pro Frequenz ergibt sich eine Stichprobengröße von $N = 333$. Aus der Konvergenzanalyse (siehe Abbildungen 6.1 und 6.2) wird deutlich, dass die Konvergenzfehler $\epsilon_{H_{k,i}}$ und $\epsilon_{T_{k,i}}$ im Bereich von $10^{-1} - 3 \cdot 10^{-2}$ liegen. Die Konvergenzfehler sind somit maximal eine Größenordnung kleiner als die berechneten Effektgrößen. Zur qualitativen Beurteilung der Unterschiede im Verhalten der Effektgrößen in Resonanzen und Antiresonanzen ist die erreichte Genauigkeit der numerischen Simulation jedoch ausreichend.

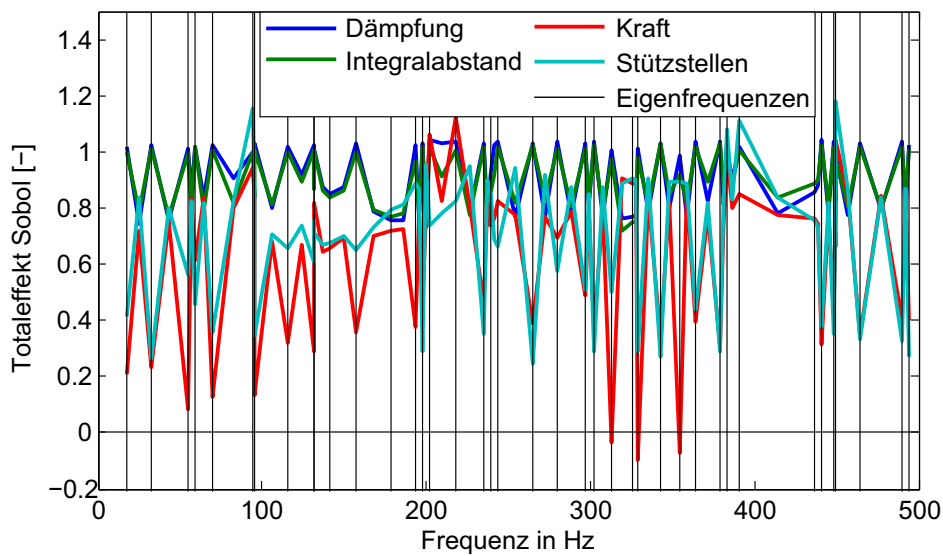


Abbildung 6.3: Totaleffekt nach Sobol für alle Parameter ($P_1 - P_4$), aufgetragen über der Frequenz

Der Totaleffekt nach Sobol ist in Abbildung 6.3 für die Parameter ($P_1 - P_4$), die in der Sensitivitätsanalyse mit fester Frequenz verwendet wurden, aufgetragen. Je größer der Wert eines Totaleffektes ist, desto größer ist sein Einfluss auf die Zielgröße. Die senkrechten schwarzen Linien kennzeichnen die Lage der Eigenfrequenzen. Der Verlauf aller Parameter zeigt, dass sich die Effektgrößen in den Eigenfrequenzen von denen in den Antiresonanzen deutlich unterscheiden. Noch deutlicher wird dies, wenn man den Totaleffekt für einen Parameter jeweils nur mit den Eigenfrequenzen und mit den Antiresonanzen als Frequenzstützstellen in einem Diagramm gegenüber stellt. Die Abbildung 6.4 zeigt diese beiden Größen für den Parameter P_4 (Stützstellenanzahl auf der Platte).

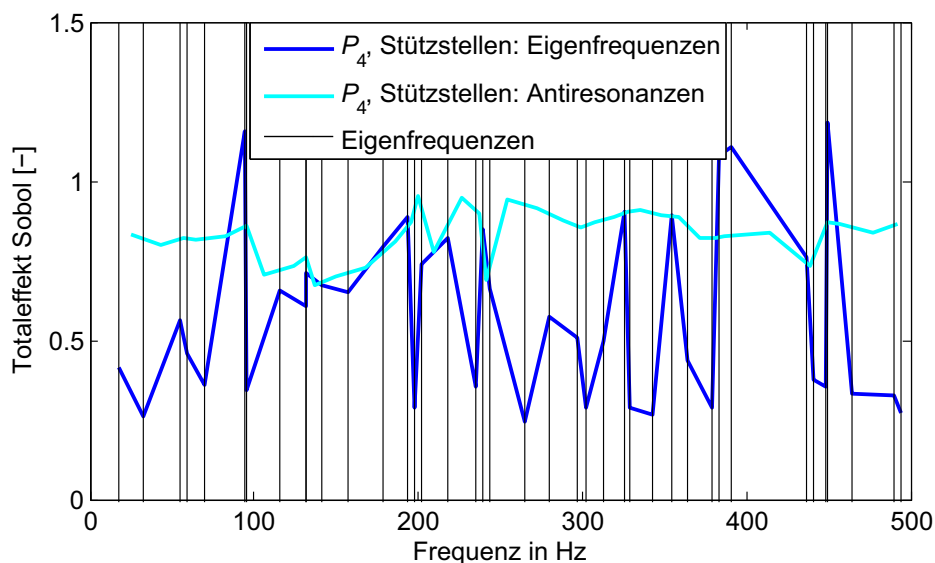


Abbildung 6.4: Totaleffekt nach Sobol in den Eigenfrequenzen und Antiresonanzen für den Parameter P_4 (Stützstellenanzahl), aufgetragen über der Frequenz

In Abbildung 6.4 ist zu erkennen, dass die Werte des Totaleffektes in den Eigenfrequenzen (Stützstellen: Eigenfrequenzen) einer wesentlich größeren Streuung unterliegen als die Effektgrößen in den Antiresonanzen. Das System reagiert in den Eigenfrequenzen sensibler auf Parameteränderungen, was zu einer größeren Streuung der Zielgröße und damit auch des Totaleffektes führt. Wird, wie in der Sensitivitätsanalyse mit fester Frequenz, eine Eigenfrequenz als Anregungsfrequenz des Systems gewählt, muss eine ausreichend große Anzahl an Simulationen verwendet werden, um die Konvergenz der Effektgrößen sicher zu stellen. Die in Abschnitt 6.3.1 vorgestellte Sensitivitätsanalyse mit der zweiten Eigenfrequenz als feste Frequenz kann demnach als „worst case“ Abschätzung betrachtet werden.

6.4 Einfluss des Integralabstandes, der Diskretisierung und der Frequenz auf die Leistungsberechnung

Die in Abschnitt 6.3.1 durchgeführte Sensitivitätsanalyse hat ergeben, dass der Integralabstand und die Anregungskraft einen wesentlichen Einfluss auf die Leistungsberechnung mittels STI haben. Da die Anregungskraft bei realen Problemen nicht immer ohne Weiteres beeinflusst werden kann, wird im folgenden Abschnitt an Stelle der Kraft die Diskretisierung (Stützstellenanzahl) als weiterer Parameter herangezogen. Der Integralabstand hat zusammen mit der Stützstellenanzahl einen wesentlichen Einfluss auf die Genauigkeit der numerischen Integration, mit der die Leistung aus der STI berechnet wird. Die Auswirkungen der Variation dieser beiden Parameter auf die Leistungsberechnung werden im Folgenden untersucht. In Abbildung 6.5 wird der Mittelwert des Fehlers $\epsilon_{P_{\text{rel}}, \text{Int}}$ (Gleichung (6.10)) der mittels Integral aus der STI berechneten Leistung für zwölf verschiedene Diskretisierungen von 20×10 bis 120×80 Punkten auf der Platte gezeigt. Der Fehler ist über den Abstand des Integrals von der Quelle aufgetragen. Die STI wird für diese Beispiele mit dem Gradientenverfahren berechnet. Zum Vergleich wird darüber hinaus der Mittelwert des Fehlers der analytischen Lösung $\epsilon_{P_{\text{rel}}, \text{analytisch}}$ der Leistungsberechnung abgebildet. Dieser berechnet sich aus der analytisch berechneten Leistung (Gleichung 6.9) zu

$$\epsilon_{P_{\text{rel}}, \text{analytisch}} = (P_{\text{zu}} - P_{\text{analytisch}}) / P_{\text{zu}} \cdot 100\% . \quad (6.20)$$

Mit zunehmendem Abstand der Integrallinie von der Quelle nimmt die mittels Integration aus der STI berechnete Leistung aufgrund von Verlusten durch Dissipation ab. Der Fehler bei der Leistungsbestimmung nimmt damit zwangsläufig für größer werdende Abstände zu. Der Fehler der analytischen Lösung $\epsilon_{P_{\text{rel}}, \text{analytisch}}$ entspricht demnach dem kleinstmöglichen Fehler, der bei einem bestimmten Abstand der Integrationsgrenze von der Quelle auftritt. Um den Simulationsaufwand zu reduzieren, wurden die Integrale für 79 Frequenzstützstellen im Frequenzbereich bis 500 Hz berechnet. Als Stützstellen werden die ersten 40 Eigenfrequenzen und die zwischen den Eigenfrequenzen liegenden Antiresonanzen verwendet.

Aus Abbildung 6.5 wird deutlich, dass es in Abhängigkeit von der Diskretisierung einen optimalen Abstand des Integrals von der Quelle gibt, für den der Fehler der numerischen Lösung $\epsilon_{P_{\text{rel}}, \text{Int}}$ minimal wird. Je nach verwendeter Diskretisierung beträgt dieser Abstand 0,03 m (120×60 Punkte) bis 0,09 m (30×15 Punkte). Zu kleineren Abständen hin nimmt der Fehler aufgrund der geringer werdenden Anzahl an Elementen, die als Stützstellen in der numerischen Integration verwendet werden, zu. Bei größer werdenden Abständen steigt der mittlere Fehler an, da die Dissipation den mittels Integral aus der STI

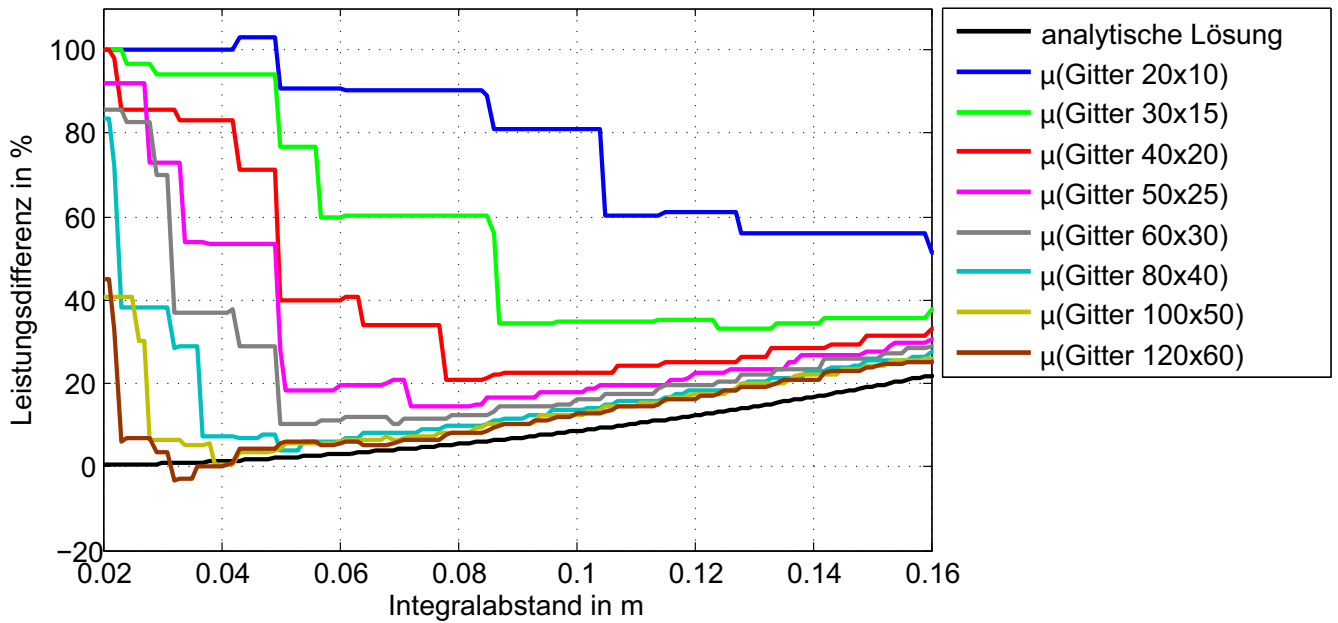


Abbildung 6.5: Mittelwert des relativen Fehlers $\epsilon_{P_{rel}, Int}$ in Abhängigkeit vom Integralabstand und von der Diskretisierung

berechneten Wert reduziert. In diesem Bereich erreicht der mittels Integral berechnete Wert für die Leistung nahezu den Wert der analytisch berechneten Leistung und verläuft parallel zu diesem. Darüber hinaus zeigt sich, dass der Fehler $\epsilon_{P_{rel}, Int}$ für feinere Gitter schneller gegen den Fehler der analytischen Lösung $\epsilon_{P_{rel}, analytisch}$ konvergiert. Je feiner die Struktur diskretisiert ist, desto geringer kann demnach die Entfernung der Integrallinie von der Quelle sein. Der Fehler der numerischen Integration nimmt mit steigender Anzahl an Punkten, die für die Leistungsberechnung mittels Integration verwendet werden, ab. Der stufenförmige Verlauf der Kurven der numerischen Lösung entsteht aufgrund des diskreten Gitters, da somit das Integral ebenfalls diskrete Abstände von der Quelle einnimmt. Des Weiteren wird deutlich, dass ein Gitter von mindestens 40×20 Punkten auf der Platte (entspricht ca. 1700 Messpunkten pro Quadratmeter) verwendet werden muss, um gute Ergebnisse für die Berechnung der Leistung aus der STI zu bekommen. Ab 80×40 Punkten auf der Platte (entspricht ca. 6850 Messpunkten pro Quadratmeter) ist keine deutliche Verbesserung der Leistungsberechnung mittels numerischer Integration mehr möglich. Die Kurvenverläufe sind bei feinerer Diskretisierung für Abstände größer 0,04 m nahezu deckungsgleich.

Wie in Kapitel 4 beschrieben eignet sich auch das CDS-Verfahren sehr gut zur Berechnung der STI. Wird dieses Verfahren zur Berechnung der STI verwendet, ergeben sich keine Unterschiede für die Leistungsberechnung im Vergleich zum Gradientenverfahren.

Die Standardabweichung des relativen Fehlers $\epsilon_{P_{rel}, Int}$ ist in Abbildung 6.6 für alle untersuchten Diskretisierungen dargestellt. Für kleine Integralabstände ist die Standardabweichung zunächst für alle Diskretisierungen außer für 20×10 Punkte nahezu identisch und liegt bei etwa 5 %. Für eine hohe Anzahl an Punkten auf der Platte ($\geq 80 \times 40$ Punkte) bleibt die Standardabweichung des Fehlers $\epsilon_{P_{rel}, Int}$ auch für größer werdende Abstände des Integrals von der Quelle bei ca. 5 %. Werden weniger Punkte für die Diskretisierung verwendet, steigt die Standardabweichung deutlich an. Im Bereich geringerer

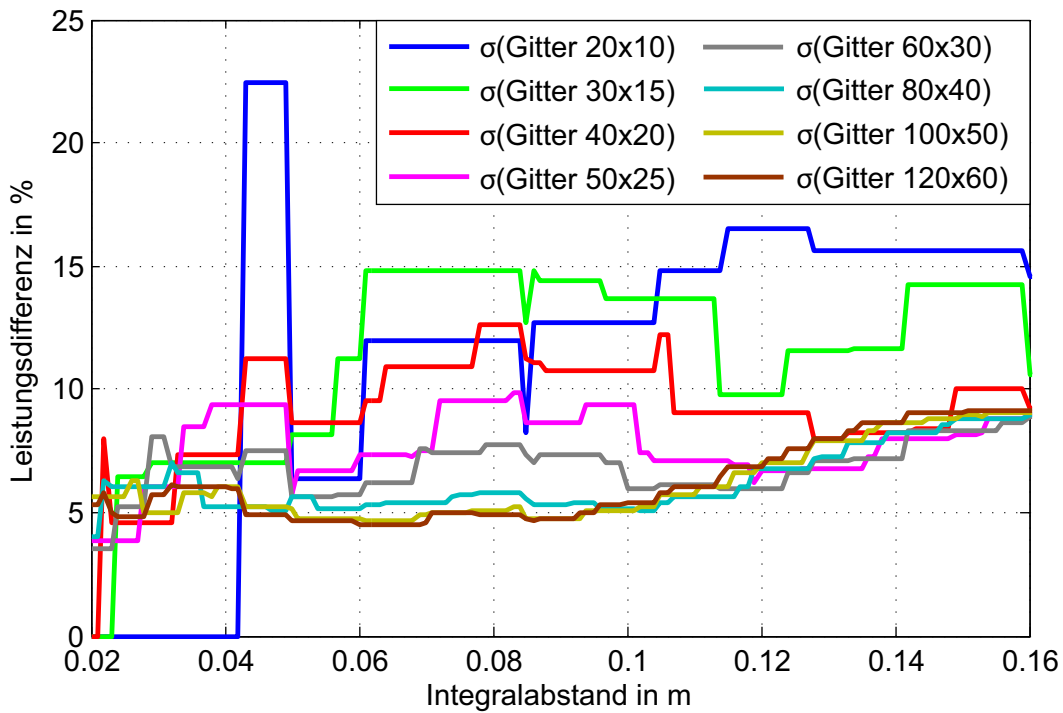


Abbildung 6.6: Standardabweichung des relativen Fehlers $\epsilon_{p_{rel}, Int}$ in Abhängigkeit vom Integralabstand und von der Diskretisierung

Mittelwerte des Fehlers $\epsilon_{p_{rel}, Int}$ (Abstand von der Quelle zwischen 0,04 m und 0,1 m) beträgt die Standardabweichung in Abhängigkeit von der Punkteanzahl auf der Platte zwischen 5 % und 14 %.

Die Streuung entsteht durch die Frequenzabhängigkeit der betrachteten Fehlergröße. Die Darstellung des Fehlers im Frequenzbereich in Abbildung 6.7 erfolgt für sechs Diskretisierungen, der Integralabstand ist für jede Diskretisierung so gewählt, dass der mittlere Fehler (siehe Abbildung 6.5) minimal ist.

Der Verlauf der Kurven in Abbildung 6.7 verdeutlicht, dass zum einen der mittlere Fehler $\epsilon_{p_{rel}, Int}$ bei geringerer Punktedichte auf der Struktur größer ist. Zum anderen steigt der Fehler zu hohen Frequenzen hin schneller an, je geringer die Diskretisierung ist. Je feiner die Struktur diskretisiert ist, desto genauer kann der Verlauf der STI abgebildet werden und desto genauer ist demnach auch die Leistungsberechnung auf Basis der STI. Vor allem bei hohen Frequenzen wirkt sich ein feines Raster positiv auf die Berechnung der Leistung aus, da auch kleine Wirbelstrukturen und Details im STI-Verlauf in die Berechnung mit einfließen können. Der Fehler $\epsilon_{p_{rel}, Int}$ beträgt beispielsweise bei 448,7 Hz (36. Eigenfrequenz) und einer Diskretisierung von 40×20 Punkten 86 %. Für eine deutlich größere Anzahl von 100×50 Punkten auf der Platte beträgt der Fehler bei dieser Frequenz nur noch 4 %. Bei dieser Frequenz verlaufen die STI-Vektoren im Bereich der Anregungsstelle nahezu parallel zu den beiden seitlichen Integrationslinien (siehe Abbildung 6.8), was aufgrund der kleinen STI-Anteile in Normalenrichtung zu den Integrationslinien den Fehler bei geringerer Diskretisierung potenziert. Um dies zu veranschaulichen, ist der STI-Verlauf im Bereich der Anregungsstelle in Abbildung 6.8 für beide Diskretisierungen dargestellt. Die rechteckigen Integrationsbereiche sind in beiden Abbildungen jeweils mit dem für die Leistungsberechnung optimalen Abstand von der Quelle (schwarzer Punkt) eingefügt.

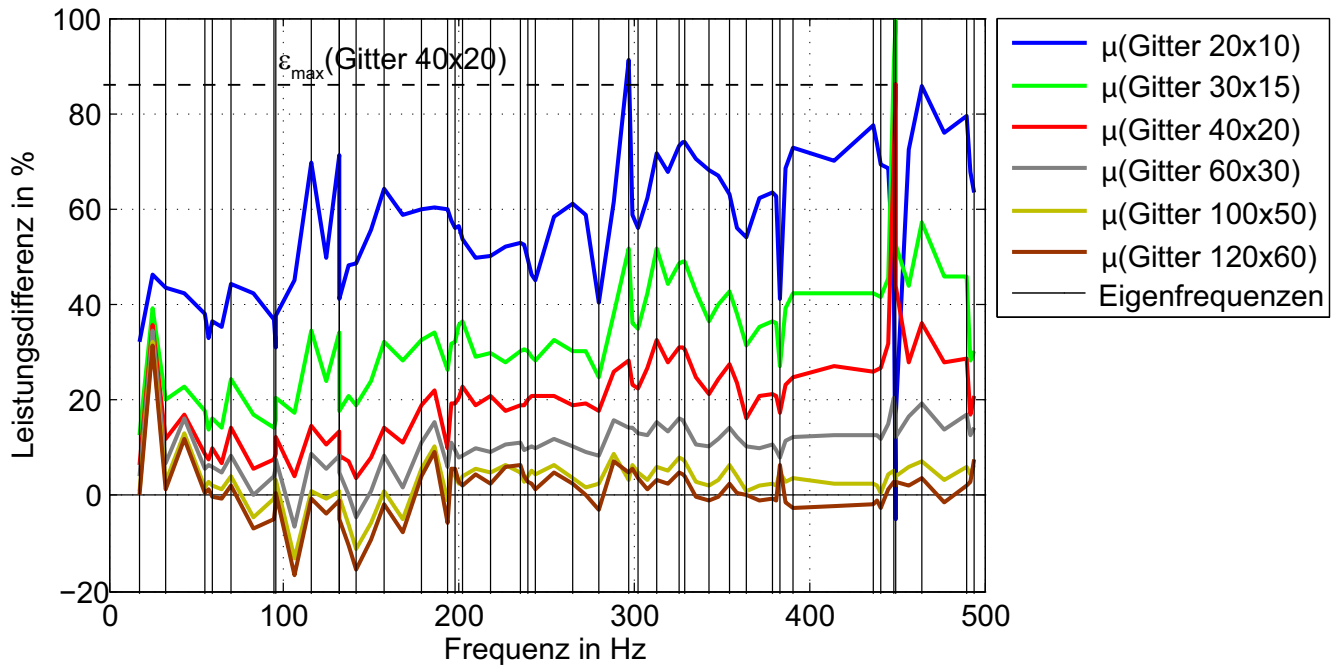


Abbildung 6.7: Mittelwert des relativen Fehlers $\epsilon_{p_{rel}, Int}$ in Abhängigkeit von der Frequenz und von der Diskretisierung

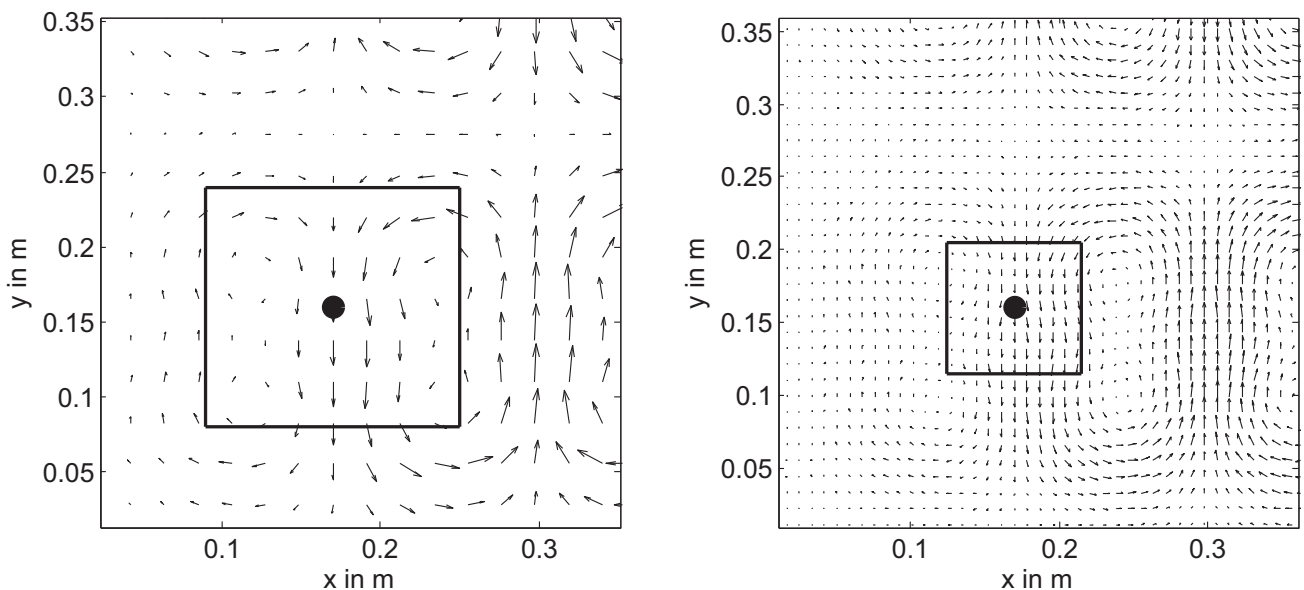


Abbildung 6.8: Vergleich des STI-Verlaufs im Bereich des Kraftangriffspunktes bei 448,7 Hz (36. Eigenfrequenz) bei unterschiedlicher Diskretisierung, links 40 x 20 Punkte, rechts 100 x 50 Punkte

Durch den Vergleich des STI-Verlaufs im Bereich der Anregungsstelle bei 40×20 Punkten und 100×50 Punkten in Abbildung 6.8 wird ersichtlich, dass die Wirbelstrukturen durch das feine Gitter deutlich detaillierter dargestellt werden. Bei feinerer Diskretisierung wird das numerische Integral mit einer größeren Anzahl an Stützstellen berechnet. Somit wird der Fehler, der durch die numerische Integration entsteht, reduziert. In FE-Simulationen werden zudem durch eine größere Diskretisierung mehrere

STI-Vektoren zu einem zusammengefasst, wodurch Fehler in Betrag und Richtung der STI-Vektoren entstehen. Beide Fehlerarten wirken sich bei der Leistungsberechnung besonders negativ aus, wenn, wie in diesem Beispiel, die STI-Vektoren nahezu parallel zu den Integrationslinien verlaufen und damit die Normalenanteile der STI, die für die Leistungsberechnung verwendet werden, sehr klein sind.

6.5 Experimentelle Validierung der Ergebnisse

Die Geschwindigkeitsverteilung auf der Platte wurde für 32 verschiedene Frequenzen mit einem groben Gitter von 40×20 Punkten und einem feinen Gitter von 80×40 Punkten gemessen. Die Ergebnisse für jede Frequenz wurden aus fünf Messwiederholungen durch Mittelung gewonnen. Die durch den Shaker zugeführte Kraft und die Geschwindigkeit am Kraftangriffspunkt wurden mit einem Impedanzmesskopf gemessen. Die Amplitude der Anregungskraft wurde für jede Frequenz identisch eingestellt. Die Empfindlichkeit des Laservibrometers wurde ebenfalls für jede Frequenz angepasst, um eine optimale Aussteuerung zu gewährleisten. Die STI wurde mit dem Gradientenverfahren und dem CDS-Verfahren berechnet, die analytische Lösung wurde nach Gleichung (6.9) berechnet. Die über den Integralabstand und über der Frequenz aufgetragenen Fehler der numerisch berechneten Leistung werden für die Integralmethode bestimmt und in Abbildungen 6.9 und 6.10 gezeigt. In diesen Beispielen wurde die STI mit dem Gradientenverfahren bestimmt, das CDS-Verfahren liefert nahezu identische Ergebnisse. Wird die Leistung mit der Divergenz der STI nach Gleichungen (6.10) und (6.12) berechnet, ergeben sich ebenfalls praktisch identische Ergebnisse.

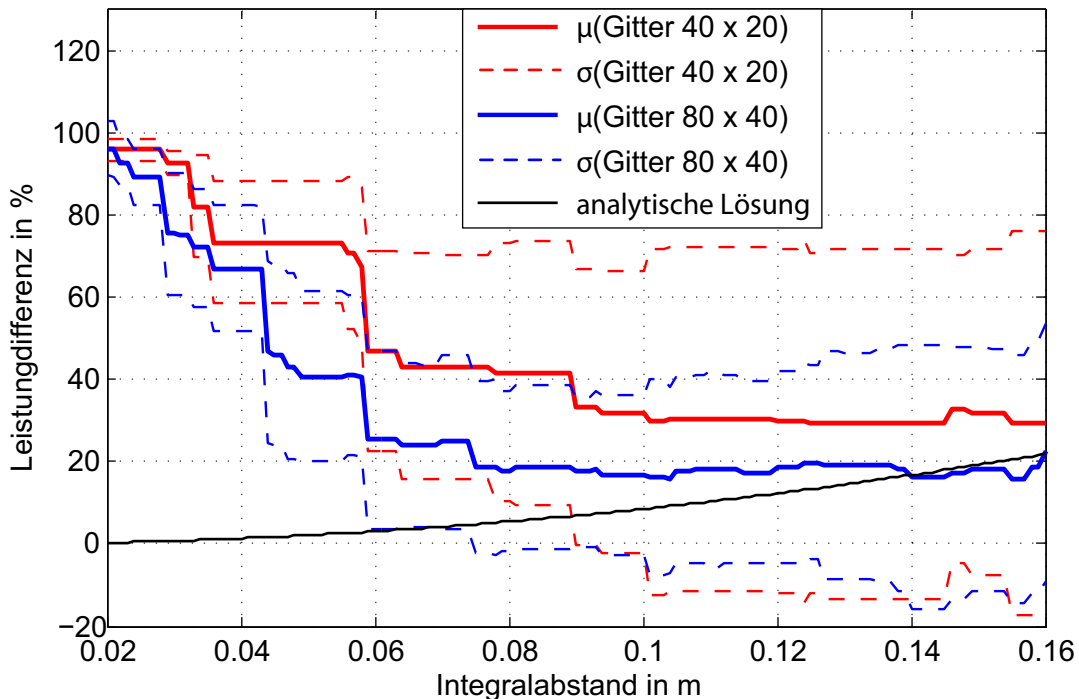


Abbildung 6.9: Mittelwert und Standardabweichung des Fehlers $\epsilon_{p_{\text{rel}}, \text{Int}}$ in Abhängigkeit vom Integralabstand

In experimentellen Untersuchungen zeigt die Leistungsberechnung in Abhängigkeit von der Diskretisierung und vom Integralabstand (Abbildung 6.9) ein mit der numerischen Simulation vergleichbares Verhalten. Für die größere Anzahl an Punkten auf der Platte (80×40) ist der Mittelwert des Fehlers $\epsilon_{P_{\text{rel}}, \text{Int}}$ geringer und beträgt bei einem Integralabstand von 0,1 m von der Quelle etwa 17 %. Auch die Streuung ist für die feinere Diskretisierung geringer und beträgt für den optimalen Abstand ca. 20 %. Im Vergleich zu den Ergebnissen der numerischen Simulation sind der Mittelwert und die Standardabweichung des relativen Fehlers für beide Diskretisierungen um etwa 10 % größer.

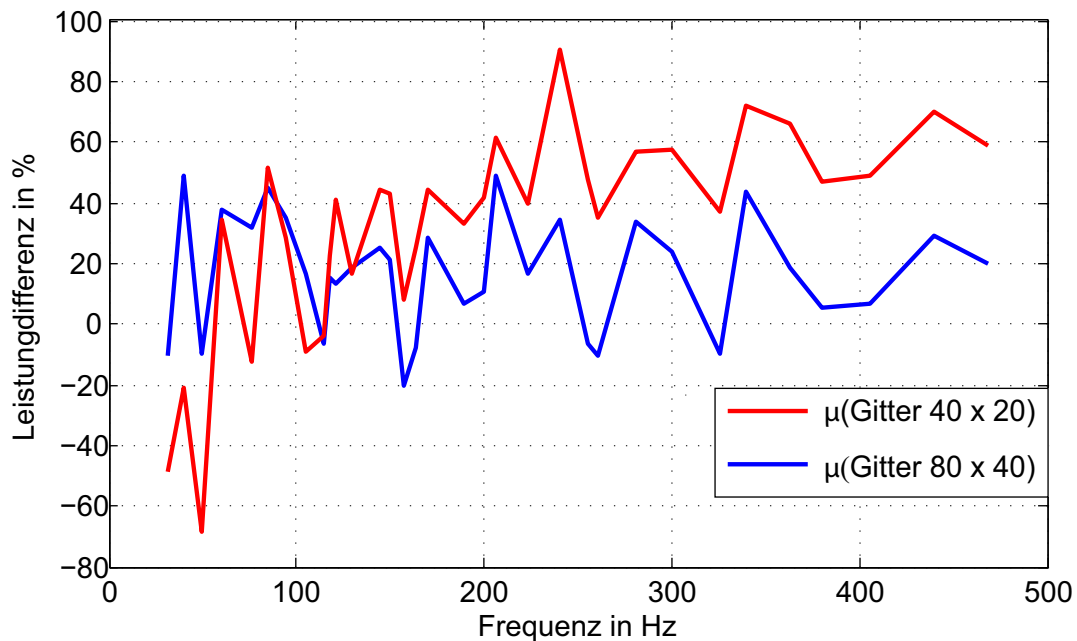


Abbildung 6.10: Mittelwert des relativen Fehlers $\epsilon_{P_{\text{rel}}, \text{Int}}$ in Abhängigkeit von der Frequenz und von der Diskretisierung

Die Abbildung 6.10 zeigt das Verhalten des Fehlers $\epsilon_{P_{\text{rel}}, \text{Int}}$ in Abhängigkeit von der Frequenz für den optimalen Integralabstand. Dieser liegt für beide Diskretisierungen bei 0,1 m. Wird ein Messraster von 40×20 Punkten auf der Platte verwendet, steigt der Fehler wie in der numerischen Simulation zu höheren Frequenzen hin deutlich an. Der Fehler für die feinere Diskretisierung ist im direkten Vergleich deutlich geringer, liegt aber über dem Fehler der entsprechenden numerischen Simulation.

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass sowohl in numerischen als auch in experimentellen Simulationen eine Diskretisierung von mindestens 1700 Messpunkten pro Quadratmeter (40×20 Punkte auf der Platte) verwendet werden muss. Sehr gute Ergebnisse für die Leistungsberechnung aus der STI sind ab 6850 Messpunkten pro Quadratmeter (80×40 Punkte auf der Platte) zu erwarten. Prinzipiell ist es ausreichend, nur die Bereiche der Struktur, in denen die Integrale für die Leistungsberechnung liegen, entsprechend fein zu diskretisieren. Der Rest der Struktur kann je nach Simulations- oder Messaufgabe auch mit einem deutlich gröberen Gitter vernetzt werden. Aufgrund der minimalen Unterschiede zwischen dem Gradientenverfahren und dem CDS-Verfahren können beide Berechnungsmethoden zur Bestimmung der Leistung auf Basis der STI verwendet werden.

7 Methoden zur Bewertung passiver und aktiver Systeme auf Basis der STI

In den Kapiteln 4, 5 und 6 wurden die Grundlagen erarbeitet, um den Betrag der STI und die Richtung des STI-Vektors sowie die Leistung auf Basis der STI in numerischen und experimentellen Simulationen richtig zu bestimmen. Zur Berechnung der STI aus Verschiebungen auf der Oberfläche der Struktur werden die in Kapitel 4 ausgewählten numerischen Verfahren zur Berechnung der STI (Gradientenverfahren, Abschnitt 4.1.5, oder CDS-Verfahren, Abschnitt 4.1.6) verwendet. Die Abstände der Integrale von Quellen/Senken zur Berechnung der Leistung mittels STI werden unter Berücksichtigung der Ergebnisse aus Abschnitt 6.4 so gewählt, dass die zwangsläufig entstehenden Fehler minimal werden. Wird die STI aus experimentell bestimmten Daten berechnet, kommt das in Abschnitt 5.2 beschriebene Mittelungsverfahren zur Verbesserung der STI-Berechnung zum Einsatz. Aus diesen Vorarbeiten ergeben sich Anwendungsmöglichkeiten, basierend auf der STI, zur Berechnung, Analyse und Bewertung des Energieflusses in Strukturen. Als Möglichkeit zur Visualisierung der Quellen- und Senkenverteilung auf der Struktur kann die Divergenz der STI eingesetzt werden. Zudem kann mit geschlossenen Integralen die Leistung aus der STI bestimmt werden. Dies ermöglicht das Aufstellen einer Energiebilanz für passive und aktive Systeme. Hierbei wird auch auf die Besonderheiten aktiver Systeme bei der Ermittlung der Leistung eingegangen. Anhand von experimentellen Praxisbeispielen werden die Bewertungsmethoden im Folgenden erläutert.

7.1 Bestimmen der STI und der Divergenz der STI

Im ersten Beispiel ist der Rahmen, in dem die Platte befestigt ist, elastisch gelagert. Die verwendeten Abkoppellemente an den Ecken des Rahmens (rote Kreise in Abbildung 7.1) wurden so ausgelegt, dass die Schwingungen des Gesamtsystems gedämpft werden. Die STI und die Divergenz der STI wurden aus gemessenen Geschwindigkeiten berechnet, die Diskretisierung beträgt 40×20 Punkte.

Abbildung 7.1 zeigt die Verlauf des aktiven Teils der STI (weiße Pfeile) auf der Platte und den Realteil der Divergenz der STI (farbiger Hintergrund) bei einer Anregungsfrequenz von 110 Hz. Mit Hilfe der Divergenz kann die Verteilung von Quellen und Senken auf der Platte visualisiert werden. Der Shaker tritt als Quelle (roter Bereich) eindeutig hervor. Darüber hinaus kann man sehr gut erkennen, dass die Energie in Richtung der vier Ecken, an denen die Abkoppellemente sitzen, fließt, wo sie dissipiert wird.

7.2 Aufstellen der Energiebilanz im Frequenzbereich

Das Aufstellen der Energiebilanz im Frequenzbereich wird anhand der Platte mit aufgebrachtem Dämpfungsbelag (Collodin, Dicke 3 mm, gespachtelt) demonstriert. Die zugeführte und die dissipierte Leistung wird mit Hilfe von Ringintegralen um den Shaker und um den Dämpfungsbelag nach Gleichung (6.2) berechnet. Abbildung 7.2 zeigt die Platte mit einem Dämpfungsbelag unten links. Die im Belag dissipierte Leistung wird mit dem Ringintegral, das durch ein rotes Rechteck gekennzeichnet ist, berechnet. Analog wird die der Platte zugeführte Leistung mit einem Integral um den Shaker (grünes Rechteck) und die

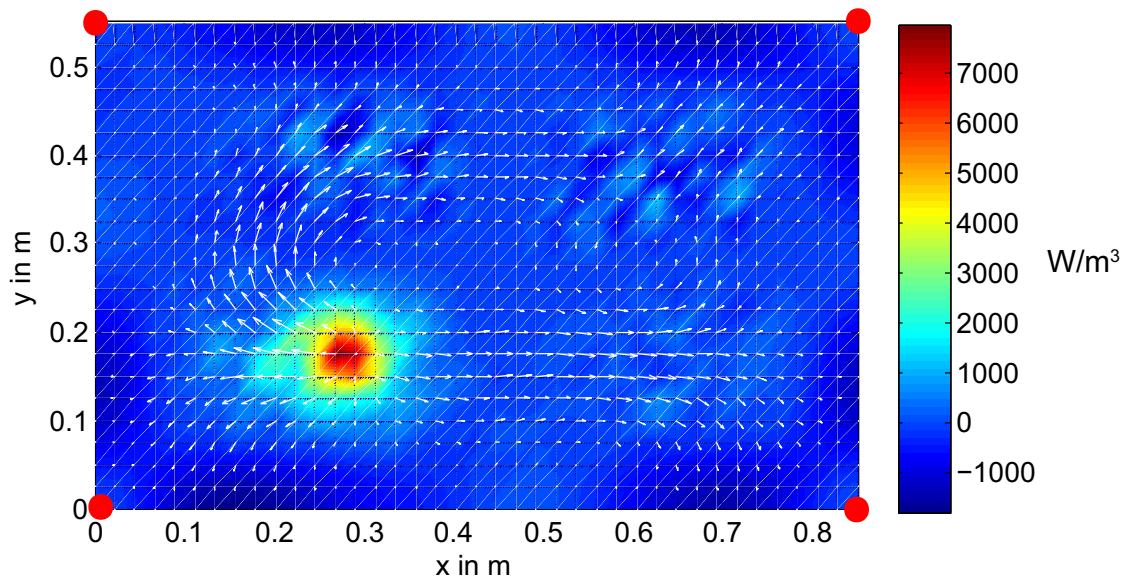


Abbildung 7.1: STI und Divergenz der STI bei 110 Hz, Rahmen an vier Ecken elastisch gelagert

über den Rand abfließende Leistung (blaues Rechteck) bestimmt. Die Abstände der Integrale entsprechen den in Abschnitt 6.4 ermittelten idealen Abständen von etwa 10 cm bei einer Diskretisierung der Struktur von 80×40 Punkten.

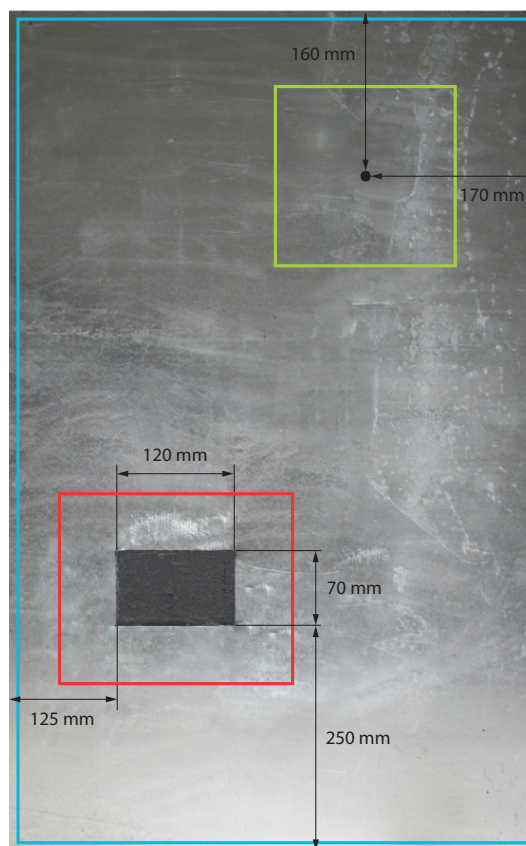


Abbildung 7.2: Platte mit Dämpfungsbelag links unten, Integrale durch farbige Rechtecke gekennzeichnet

Werden für jede gemessene Frequenz die zu- und abgeführten Leistungen wie oben beschrieben berechnet, ergibt sich eine Leistungsbilanz im Frequenzbereich, die in Abbildung 7.3 gezeigt wird.

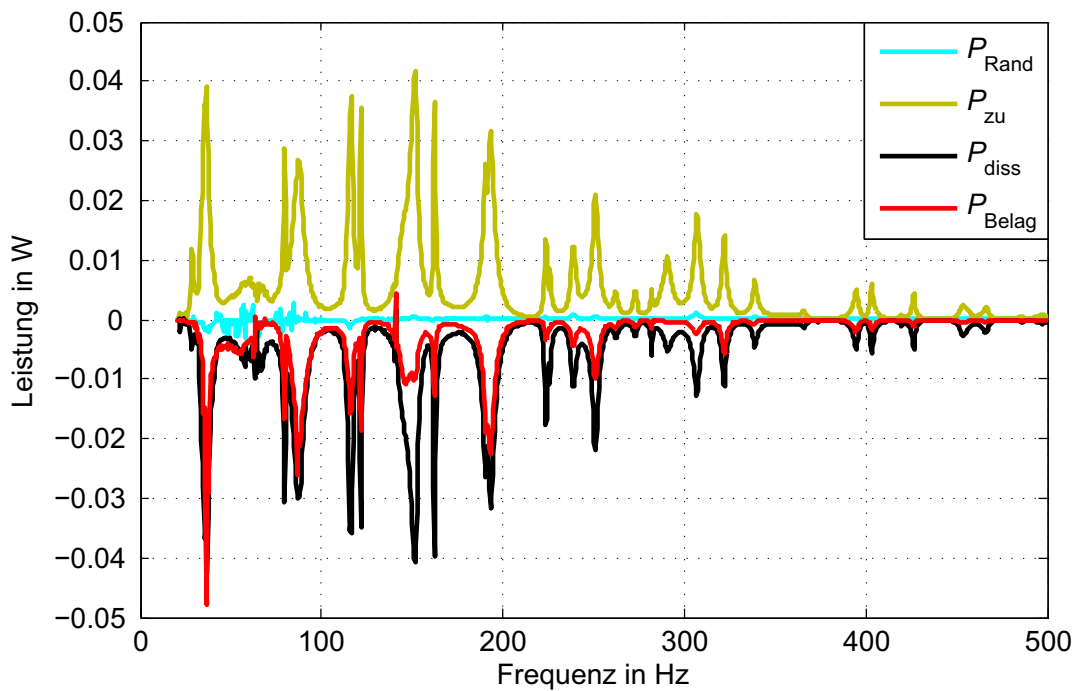


Abbildung 7.3: Leistungsbilanz im Frequenzbereich (Experiment)

Aus Abbildung 7.3 wird ersichtlich, dass die zugeführte (P_{zu}) und die insgesamt dissipierte Leistung (P_{diss}) im betrachteten Frequenzbereich von 0 Hz bis 500 Hz in etwa gleich groß sind. Dies entspricht den Erwartungen, da hier der eingeschwungene Zustand des Systems betrachtet wird. Die über den Rand abfließende Leistung ist nahezu 0. Zur Berechnung der dissipierten Leistung wurde von der Divergenz der STI für die gesamte Platte die zugeführte Leistung abgezogen. Die zugeführte Leistung berechnet sich nach Gleichung (6.1) aus der Kraft des Shakers und der Schwinggeschwindigkeit am Kraftangriffspunkt. Abgesehen von einzelnen Abweichungen im Bereich bis ca. 100 Hz kann mit diesem Verfahren die Dissipation auf der Platte, der Anteil des Dämpfungsbelages (P_{Belag}) und die über den Rand abfließende Leistung (P_{Rand}) quantitativ berechnet werden. Im Frequenzbereich bis 100 Hz wirken sich zum einen die Messfehler negativ auf die Berechnung der STI aus (siehe Abschnitt 5.1). Zum anderen können bei einzelnen Frequenzen große Abweichungen auftreten, wenn die STI-Vektoren im Bereich der Integrationsgrenzen nahezu parallel zu diesen Verlaufen (siehe Abschnitt 6.4). Eine alternative Darstellung ergibt sich nach der Mittelung über alle Frequenzen, oder bei monofrequenter Anregung, durch die Verwendung von Balkendiagrammen (siehe z. B. Abbildung 8.10).

Dieses Verfahren kann ebenso zur Berechnung der zu- und abgeführten Leistung aktiver Systeme verwendet werden, indem das Ringintegral um den Aktor (z. B. Piezopatch) gelegt wird. Allerdings hängt die Wirkleistung (Leistung berechnet aus dem Realteil der STI) bei aktiven Systemen vom Phasenwinkel zwischen den auf der Struktur angreifenden Kräften ab. Um dies zu verdeutlichen, wurde in der numerischen Simulation die Platte mit zwei punktsymmetrisch zur Mitte angeordneten Kräften mit identischer Amplitude untersucht. Der aktive Intensitätsfluss auf der Platte und die zu- und abgeführte Leistung hän-

gen vom Phasenwinkel $\Delta\phi$ zwischen den beiden Kräften ab. Um diesen Effekt isoliert zu untersuchen, wurde eine Platte ohne Dämpfung (Dämpfungsgrad $\xi = 0$) betrachtet. Um das Verhalten der Platte für alle relativen Phasenwinkel zwischen den Kräften darzustellen, zeigt Abbildung 7.4 die Summe aus kinetischer und potenzieller Energie zusammen mit der Leistung. Die dargestellten Größen wurden normiert (jeweils bezogen auf den maximalen Wert), um sie in einem Diagramm zeigen zu können. Die Anregung erfolgte bei 31 Hz in der 1-1-Mode.

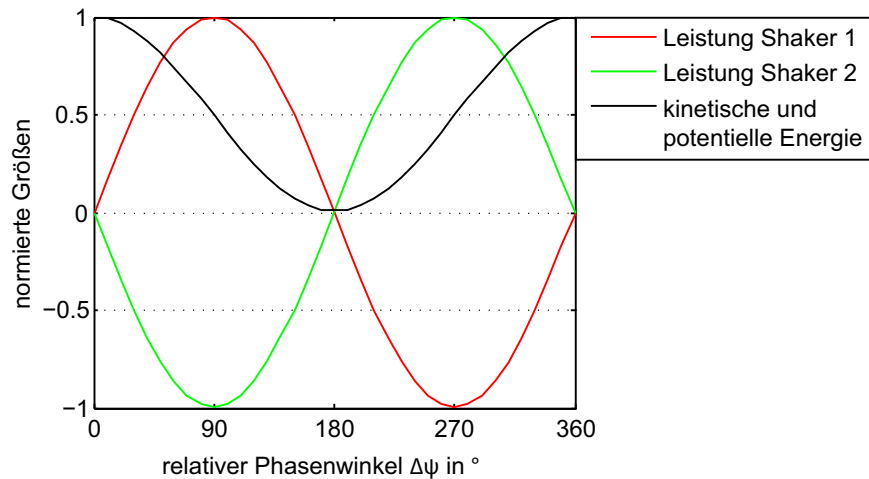


Abbildung 7.4: Zu- und abgeführte Leistung zweier Kräfte auf einer ideal ungedämpften Platte (numerische Simulation)

Aus Abbildung 7.4 wird ersichtlich, dass bei $\Delta\phi = 0^\circ$ und $\Delta\phi = 180^\circ$ keine Wirkleistung in die Platte fließt. Bei $\Delta\phi = 180^\circ$ ist die Energie minimal, bei $\phi = 0^\circ$ maximal. Im ungedämpften Fall ist für alle Phasenwinkel die Summe aus zu- und abgeführter Leistung identisch. Eine Erklärung liefert der relative Phasenwinkel zwischen Verschiebung und angreifender Kraft, da die Kraft den Schwingungszustand der Platte ändert. Die Leistung beider Kräfte wird mit $P = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{F \cdot v^*\}$ berechnet. Verändert sich nun die Phase der konjugiert komplexen Geschwindigkeit v^* , so ändern sich für beide Kräfte die zu- und abgeführten Leistungen entgegengesetzt mit identischer Amplitude.

Im gedämpften Fall (Dämpfungsgrad $\xi = 0,01$), der in Abbildung 7.5 gezeigt wird, ist die mittlere Ein- und Ausgangsleistung der Shaker größer 0.

Aufgrund der Dämpfung entsteht eine Phasenverschiebung zwischen den Punkten auf der Platte. Diese beträgt zwischen den Kraftangriffspunkten im Mittel 13° , was zu einer Verschiebung der Leistungskurven in Abbildung 7.5 führt. Daher ist die zu- und abgeführte Leistung beider Kräfte nicht mehr für alle Phasenwinkel identisch.

Im Experiment wurde anstatt des zweiten Shakers ein Piezopatch verwendet und die Phase zwischen Kraft und Piezoeingangssignal durch die Einstellungen eines PID-Reglers über alle Phasenwinkel variiert. Die Leistung des Shakers wird mit Hilfe eines Impedanzmesskopfes, der zwischen dem Shaker und der Platte montiert ist, gemessen. Die Leistung des Piezopatches kann mit Hilfe eines Ringintegrals auf Basis der STI berechnet werden (vgl. Kapitel 6). Abbildung 7.6 zeigt einen Vergleich zwischen der numerischen Simulation der Platte mit Piezopatch und dem Experiment am Prüfstand für die erste Eigenfrequenz.

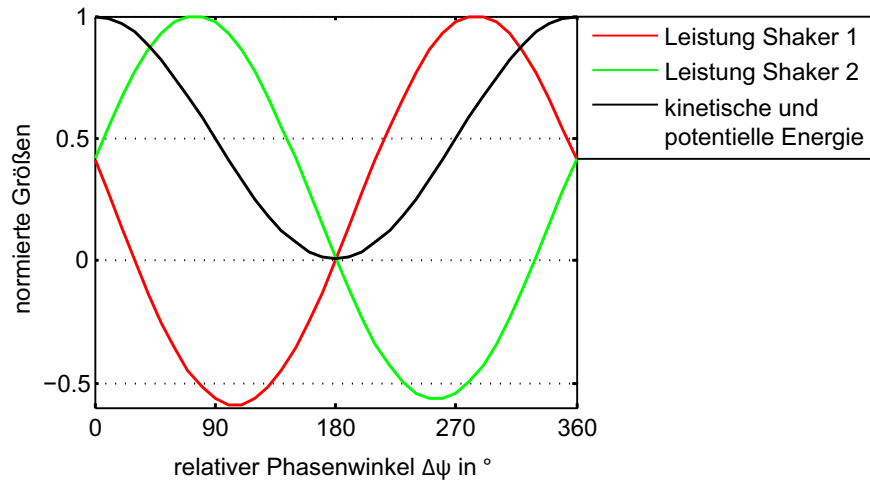


Abbildung 7.5: Zu- und abgeführte Leistung zweier Kräfte auf einer gedämpften Platte $\xi = 0,01$ (numerische Simulation)

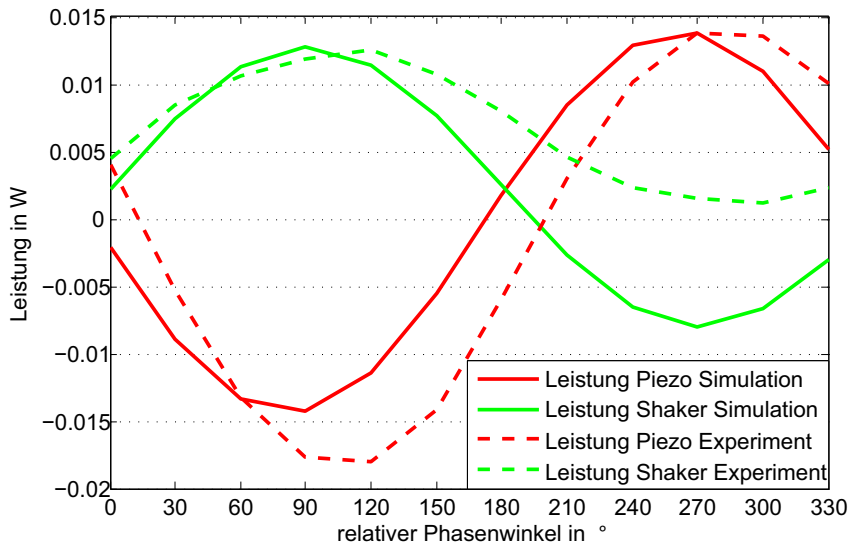


Abbildung 7.6: Zu- und abgeführte Leistung in Abhängigkeit vom Phasenwinkel, Vergleich zwischen numerischer Simulation und Experiment

Aus Abbildung 7.6 wird deutlich, dass die für die Simulation ausführlich beschriebene Phasenbeziehung des gedämpften Systems zwischen zu- und abgeführter Leistung quantitativ im Experiment bestätigt werden kann. Der Phasenunterschied von ca. 30° zwischen den gemessenen Kurven und den Simulationsergebnissen ist auf die Modellierung der Dämpfung zurückzuführen, die in der Simulation die Verluste in der Einspannung vernachlässigt. Darüber hinaus weichen die Verschiebungen zwischen Simulation und Experiment im Mittel um den Faktor 1,5 voneinander ab. Dies ist ebenfalls auf die vernachlässigten Verluste in der Randeinspannung zurückzuführen, was zu einer zu geringen Gesamtdämpfung führt. Andererseits kann die Dämpfung der Platte in der numerischen Simulation nicht weiter erhöht werden, da für die betrachtete Frequenz und den verwendeten Dämpfungsgrad ($\xi = 1 \cdot 10^{-4}$) die Phasenverschiebung zwischen Shaker und Piezopatch in der numerischen Simulation gut mit den Messdaten übereinstimmt.

7.3 Platzierung von Aktoren unter energetischen Gesichtspunkten

Wird bei der Auslegung eines aktiven Systems, wie in Abschnitt 8.1 beschrieben, zur Schwingungsminderung ausschließlich der Steuerbarkeitsindex [71] verwendet, so wird nicht die frequenzabhängige Verteilung der Energie im System bei der Auswahl der Aktorposition berücksichtigt. Auch die Platzierung des Aktors ausschließlich unter der Berücksichtigung der STI-Verteilung im System kann zu ungeeigneten Aktorpositionen führen. In Abbildung 3.5 (siehe S. 31) ist der Realteil der STI auf der Platte dargestellt. Würde man einen Aktor, der senkrecht auf die Platte wirkt, an der Stelle des größten Flusses platzieren, hätte er wenig Einfluss, da sich hier die Knotenlinie der 1-2-Mode befindet. Besser geeignet ist die Divergenz der STI zur energetischen Bewertung von Strukturen, da diese Aufschluss über die Verteilung von Quellen und Senken auf der Struktur gibt. Je nach Aktortyp und Krafteinleitung in die Struktur ist diese Information alleine auch nicht ausreichend zur Platzierung von Aktoren. Eine Platzierung unter energetischen und strukturmechanischen Gesichtspunkten gelingt durch Kombination des Steuerbarkeitsindex (Dehnungen für Piezopatches, Verschiebungen senkrecht zur Platte für Piezo-Stackaktor) mit der Divergenz der STI, indem beide Größen normiert und miteinander multipliziert werden, wie es in der Abbildung 7.7 schematisch dargestellt ist.

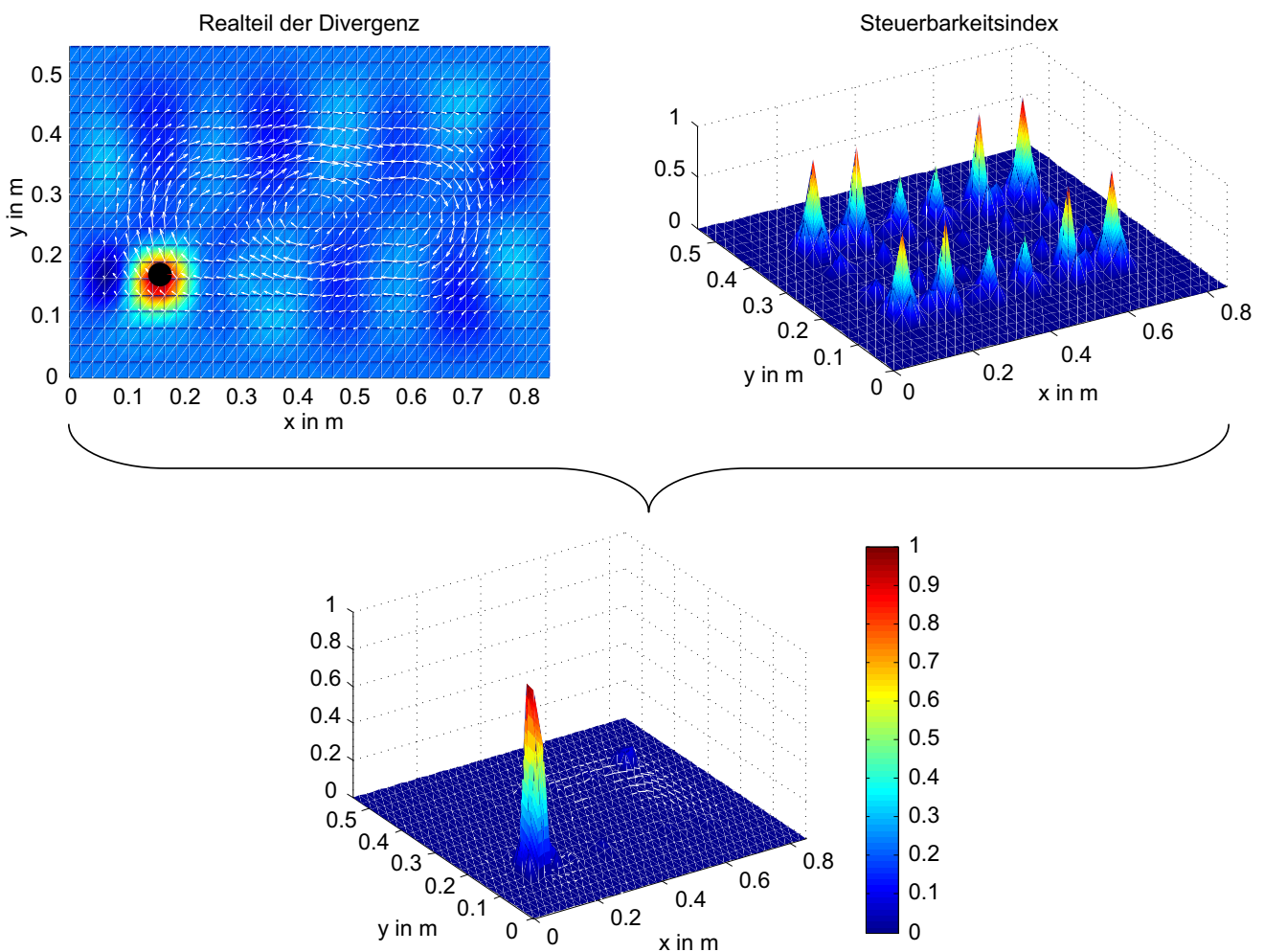


Abbildung 7.7: Steuerbarkeitsindex gewichtet mit der Divergenz der STI

Das Bild links oben in Abbildung 7.7 zeigt die aktive STI (weiße Pfeile) und die auf die größte Amplitude normierte Divergenz der STI, das Bild oben rechts zeigt den auf die größte Verschiebung normierten Steuerbarkeitsindex für Verschiebungen senkrecht zur Platte. Im unteren Bild ist der durch Multiplikation mit der Divergenz der STI gewichtete Steuerbarkeitsindex dargestellt. Diese Methode zeigt die Beeinflussbarkeit der Energieeinleitungsstellen der Struktur und sollte an erster Stelle einer Untersuchung zur Platzierung aktiver und passiver Maßnahmen zur Schwingungsminderung stehen.

Analog zum beschriebenen Vorgehen kann der normierte Betrag des Realteils der STI zur Gewichtung des Steuerbarkeitsindex herangezogen werden. Die Gewichtung mit dem Betrag der STI hebt die Bereiche auf der Struktur hervor, in denen der Energiefluss groß ist. Unterscheidet man dann noch zwischen Longitudinalwellenanteil und Transversalwellenanteil der STI, kann der entsprechende Aktortyp (z. B. Piezopatch oder Stapelaktor) wirkungsvoll eingesetzt werden. Das Verfahren ist natürlich auch zur Identifikation von Strukturbereichen geeignet, in denen der Energiefluss und die Strukturschwingungen mit konstruktiven oder passiven Maßnahmen (z. B. Dämpfungsbelag) beeinflusst werden sollen.

Die STI ermöglicht eine differenzierte Analyse der Energieausbreitung in Strukturen sowie die Berechnung der zu- oder abgeführten Leistung mittels Integration. Der typische Ablauf der STI-Berechnung ist für numerische und experimentelle Simulationen in folgendem Ablaufplan dargestellt.

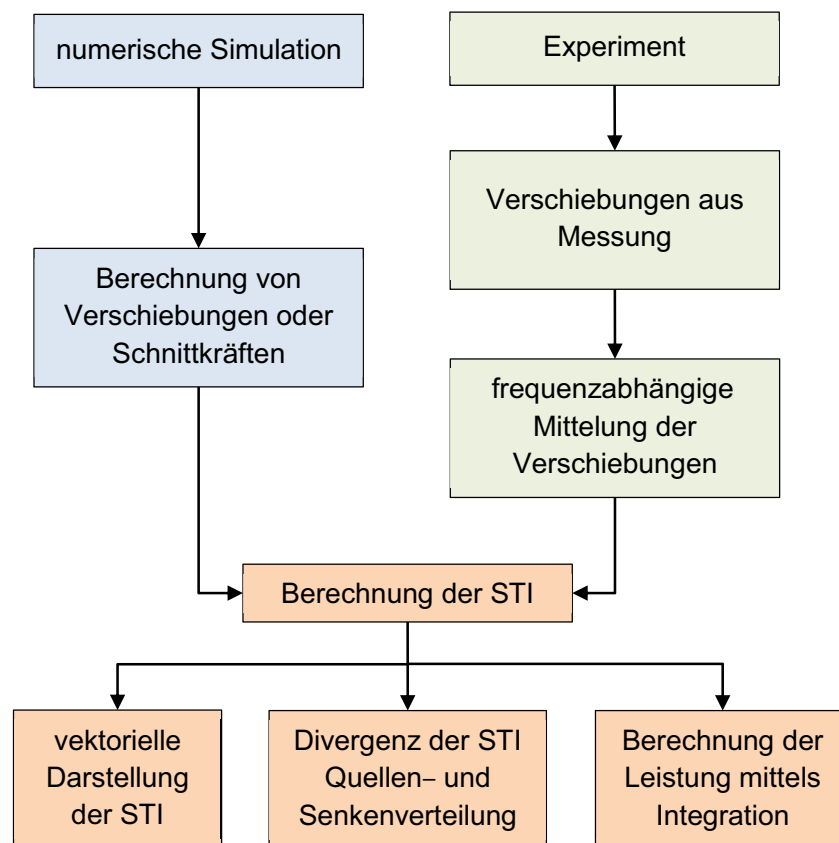


Abbildung 7.8: Ablaufplan der STI-Berechnung

In numerischen oder experimentellen Simulationen werden zuerst die Verschiebungen auf der Struktur bestimmt. Die Diskretisierung der Struktur muss mindestens 1700 Messpunkte pro Quadratmeter betragen (siehe Abschnitt 6.4). Verschiebungsdaten aus Messungen sollten zunächst, wie in Abschnitt

5.2 beschrieben, gemittelt werden. Anschließend wird aus diesen Daten die STI berechnet. Um den Energiefluss zu visualisieren, werden die Intensitätsvektoren auf der Struktur dargestellt. Der Realteil der STI beschreibt den Wirkleistungsfluss in der Struktur. Die Grafik mit Vektoren kann entsprechend mit dem Betrag des Realteils oder des Imaginärteils der STI hinterlegt werden. Alternativ kann die Divergenz der STI berechnet werden. Hieraus lässt sich die Verteilung von Quellen und Senken auf der Struktur ableiten. In Kombination mit dem Steuerbarkeitsindex ergibt sich darüber hinaus ein erweitertes Verfahren für die Aktorpositionierung. Die Leistung berechnet sich aus der STI mit geschlossenen Integralen um Quellen und Senken. Die Integrationslinie befindet sich in Abhängigkeit von der Diskretisierung in einem bestimmten Abstand von der Quelle oder Senke, sodass der Berechnungsfehler minimal wird (Abschnitt 6.4). Die Ergebnisse der Leistungsberechnung können zur Bewertung der Wirksamkeit passiver und aktiver Maßnahmen zur Schwingungsminderung verwendet werden. Auch in der numerischen Strukturoptimierung, z. B. zur optimalen Platzierung von Dämpfungsbelägen, kann diese Methode zur Berechnung der in einem Strukturbereich dissipierten Leistung verwendet werden.

8 Aktiver Eingriff in den Energiefluss

Mit einem auf dem 2-Aufnehmerverfahren basierenden Regelsystem zur Schwingungskompensation soll die STI und damit der Energiefluss in der Struktur direkt beeinflusst werden. Als Regelgröße dient der Betrag des Realteils der STI im Sensorpunkt. Das 2-Aufnehmerverfahren wird trotz der schlechten Ergebnisse bei der quantitativen Berechnung der STI (siehe Abschnitt 4.1.3) verwendet. Jedoch sind für die Minimierung der Regelgröße die quantitativen Abweichungen bei der Berechnung des Betrags der STI vernachlässigbar, da kein bestimmter Wert für den Betrag der STI im Sensorpunkt eingestellt werden soll. Des Weiteren werden nur 4 Beschleunigungsaufnehmer zur Berechnung der STI im Sensorpunkt benötigt. Um das Gradienten- oder das CDS-Verfahren zur STI-Berechnung im Sensorpunkt verwenden zu können, sind 13 Beschleunigungsaufnehmer nötig. Diese beeinflussen aufgrund ihrer Masse die dynamischen Eigenschaften der Struktur und damit die STI im Sensorpunkt in unzulässiger Weise. Darüber hinaus kommt es durch die Verwendung von 13 unterschiedlichen Aufnehmern zu Phasenfehlern, die die STI-Berechnung aus den Messergebnissen negativ beeinflussen.

Mit der Reduktion des Betrags des Realteils der STI wird zum einen die Energieweiterleitung reduziert und zum anderen die Schwinggeschwindigkeit verringert. Wird der Winkel des STI-Vektors als Regelgröße verwendet, kann zwar die Richtung des Energieflusses verändert werden, damit wird aber nicht der Energiegehalt im System reduziert. Die Schwingungsamplituden können sogar größer werden. Das Konzept der Schwingungskompensation mit STI-Regler wird mit einem Regelsystem, dessen Regelgröße die Beschleunigung ist, verglichen. Neben dem aktiven Eingriff in den Energiefluss werden anhand der geregelten Systeme die auf der STI basierenden Verfahren zur Bewertung passiver und aktiver Strukturen angewendet.

In der numerischen Simulation wird das in Kapitel 2 aufgestellte analytische Modell der Platte mit Piezopatch in Matlab-Simulink implementiert. Die Überprüfung der Simulationsergebnisse erfolgt experimentell am Prüfstand.

8.1 Bestimmung der Aktorpositionen auf der Struktur

Die optimale Aktorposition auf der Struktur hängt von der Schwingform und damit auch von der jeweiligen Eigenfrequenz ab, die angeregt werden soll. Je nach Mode befindet sich die beste Shakerposition an der Stelle der größten Amplitude (senkrecht zur Platte) der jeweils dominierenden Mode. Dies wird auch durch Gleichung (2.16) verdeutlicht, da die Kraft F mit den Eigenfunktionen ϕ_{mn} multipliziert wird. Da für Experimente ein größerer Frequenzbereich untersucht wird, müssen die Verschiebungsmaxima mehrerer Moden zur Bestimmung der Anregung berücksichtigt werden. Im Falle des Shakers, dessen Kraft senkrecht zur Platte wirkt, werden die modalen Verschiebungen in z -Richtung $\phi_{mn,z}$ der berücksichtigten Eigenfunktionen miteinander multipliziert und mit der größten Verschiebung normiert. Damit ergibt sich der so genannte Steuerbarkeitsindex Φ [71] für Krafterregung zu

$$\Phi_{\text{Kraft}} = \prod_{m,n} \frac{\phi_{mn,z}}{\max(\Phi_{\text{Kraft}})}, \quad (8.1)$$

wobei m und n die Indizes der Moden im betrachteten Frequenzbereich sind. Der Steuerbarkeitsindex kann Werte zwischen 0 und 1 annehmen, wobei an den Stellen, an denen er den Wert 0 annimmt, mindestens eine Mode nicht beeinflusst werden kann. Die folgende Abbildung zeigt den Steuerbarkeitsindex für Verschiebungen senkrecht zur Platte für den Frequenzbereich von 0 Hz bis 200 Hz. Hierbei werden die ersten 13 Moden der Platte berücksichtigt.

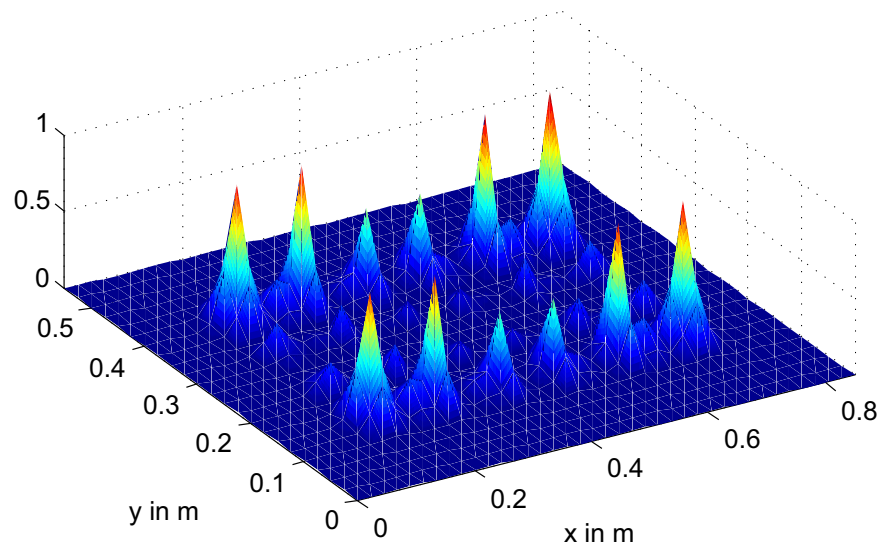


Abbildung 8.1: Steuerbarkeitsindex für Kraftanregung unter Berücksichtigung von 13 Moden

Wie in Abbildung 8.1 zu erkennen ist, sind die Spitzen, die die optimalen Bereiche für die Shakerplatzierung zeigen, schon sehr klein und lassen wenig Toleranz bei der Montage des Shakers zu. Würden nun weitere Moden berücksichtigt werden, würde sich der optimale Bereich noch weiter verkleinern. Die nach dem Steuerbarkeitsindex optimale Shakerplatzierung auf der Platte wurde bei $x = 0,16$ m und $y = 0,17$ m gefunden.

Zur Platzierung von Piezopatches geht man analog vor. Es werden jedoch die modalen Dehnungen in Plattenebene multiplikativ überlagert. Die Abbildung 8.2 zeigt die Platte mit den in der numerischen und experimentellen Simulation verwendeten Positionen des Shakers, des Piezopatches und des Sensors (Beschleunigungsaufnehmer, Mittelpunkt des aus vier Beschleunigungsaufnehmern bestehenden STI-Sensors) sowie allen weiteren relevanten Abmessungen.

8.2 Abgleich des analytischen Plattenmodells mit dem Prüfstand

Der Abgleich des analytischen Modells wird für die feste Einspannung der Platte vorgenommen, da für die Simulation und Messung des aktiven Systems ausschließlich diese Randbedingung verwendet wird. Wie schon in Abschnitt 2.2 beschrieben, liegt die tatsächliche Randbedingung bei fest eingespannter Platte zwischen der festen Einspannung und der gelenkigen Lagerung. Um das Modell an das Experiment anzupassen, wird der Ansatz mit gemischten Eigenformen (Gleichung (2.17)) verwendet und die Verteilungsfunktion $L = 0,62$ gewählt. Die feste Einspannung der Platte entspricht also nur zu 62 % der Randbedingung der festen Einspannung und zu 38 % der gelenkigen Lagerung. Die Platte wird mit einem Shaker an der Stelle $x = 0,16$ m und $y = 0,17$ m angeregt. In der numerischen Simulation wer-

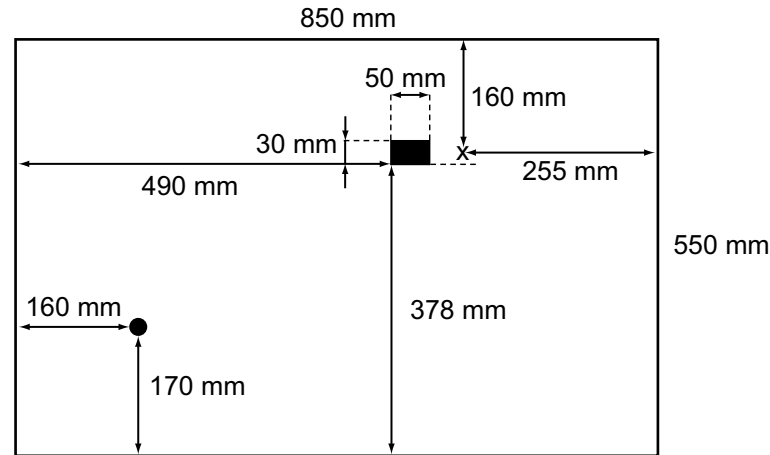


Abbildung 8.2: Aktorplatzierung auf der Platte, Shaker (Punkt) links unten, Piezopatch (Rechteck) rechts oben, Sensorposition (X)

den die Wechselwirkungen zwischen Shaker und Platte vernachlässigt, die Anregung erfolgt durch eine Punktkraft F . Die Dämpfung wird für etliche Eigenfrequenzen separat angepasst, indem im analytischen Modell die modalen Dämpfungsgrade ξ_{mn} (siehe Gleichung (2.16)) so gewählt werden, dass die Amplituden in den Eigenfrequenzen eine möglichst geringe Abweichung von den experimentellen Ergebnissen aufweisen. Der Dämpfungsgrad beträgt im Mittel $\xi = 0,002$. In Abbildung 8.3 werden die über die Platte gemittelten Verschiebungen des analytischen Modells mit denen des experimentellen Aufbaus im Frequenzbereich von 0 Hz bis 500 Hz verglichen.

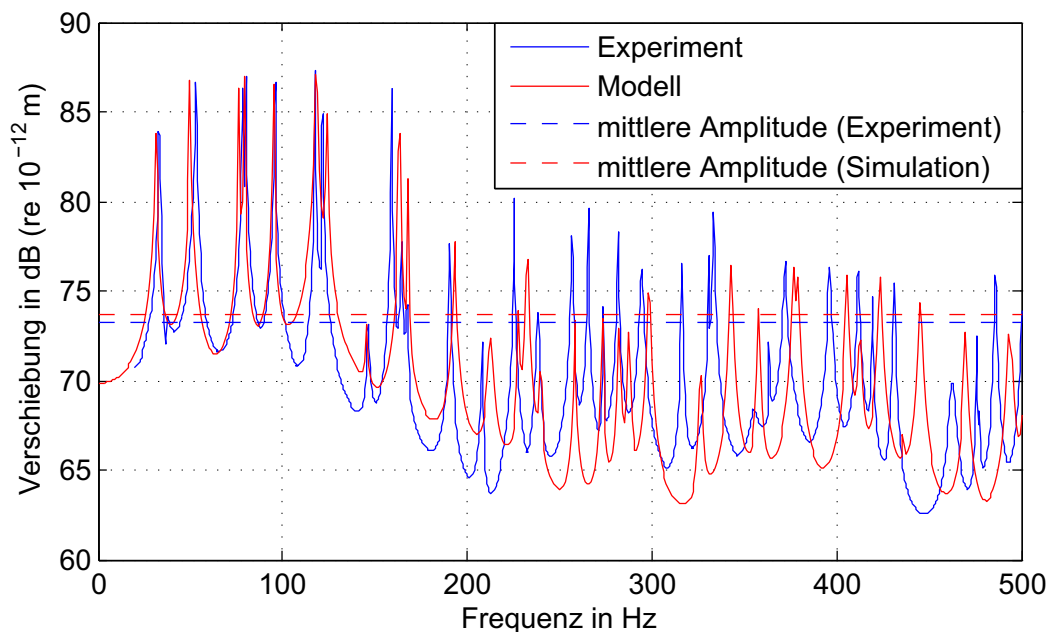


Abbildung 8.3: Vergleich zwischen Experiment und numerischer Simulation

Die Eigenfrequenzen des Modells liegen bis 100 Hz nur wenig unter denjenigen der realen Platte. Für Frequenzen größer als 100 Hz sind die Eigenfrequenzen des Modells größer als die des experimentellen Aufbaus. Dies lässt vermuten, dass in x - und y -Richtung unterschiedliche Randbedingungen vorliegen.

Man müsste demnach für beide Richtungen eine eigene Verteilungsfunktion L bestimmen und damit für die x - und y -Richtung verschiedene gemischte Eigenformen berechnen. Des Weiteren wird deutlich, dass für Frequenzen größer als 200 Hz die Eigenfrequenzen des Modells zunehmend schlechter mit denen der Platte übereinstimmen. Dies kann ein Indiz dafür sein, dass die Schubspannungen, die bei höheren Frequenzen an Bedeutung gewinnen, im Modell vernachlässigt wurden. Trotz der beschriebenen Abweichungen bildet das Modell den im Experiment verwendeten Aufbau ausreichend genau ab, so dass es für die Simulation des geregelten Systems in Matlab/Simulink verwendet werden kann.

8.3 STI-Regler auf Basis des 2-Aufnahmeverfahrens

Als Regler wird in der numerischen und experimentellen Simulation der fx -LMS-Algorithmus (Filtered reference - Least Mean Squares) verwendet, der auf einem FIR-Filter (Finite Impulse Response) W basiert. Die Anzahl der Filterkoeffizienten $w(n)$ wird durch die Filterlänge L bestimmt. Die Filterkoeffizienten werden mit dem Least Mean Squares (LMS)-Algorithmus berechnet, der die quadratische Fehlerfunktion (Gütefunktion) $J(n)$ optimiert [12].

$$J(n) = \mathbb{E}(e(n)^2) \quad (8.2)$$

In Gleichung 8.2 ist \mathbb{E} der Erwartungswert und $e(n)$ der Fehler, der sich aus der Störgröße $d(n)$ und der Stellgröße $y(n)'$ ergibt (siehe Abbildung 8.4). Aus dem Referenzsignal der Anregung $x(n)$ berechnet sich mit $y(n)' = w(n) x(n)'$ der Fehler $e(n)$ zu

$$e(n) = d(n) - w(n) x(n)' . \quad (8.3)$$

Aus den Gleichungen (8.2) und (8.3) wird deutlich, dass die Fehlerfunktion J quadratisch von den Filterkoeffizienten $w(n)$ abhängt. Das Minimum des Fehlerquadrates $e(n)^2$ wird in der Richtung des Gradienten der Fehlerfunktion gesucht. Aus dieser Minimierung ergibt sich die Berechnungsvorschrift für die Filterkoeffizienten $w(n)$ [12]

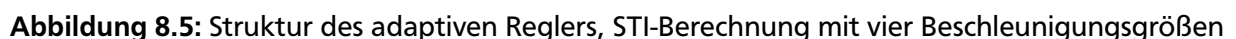
$$w(n+1) = w(n) + \mu e(n) x(n)' . \quad (8.4)$$

Die Konvergenzeigenschaften, aber auch die Stabilität des Reglers hängen von der gewählten Schrittweite μ ab. Wird diese zu groß gewählt, kann das Verfahren instabil werden, wird sie zu klein gewählt, dauert das Auffinden des Optimums sehr lange. Die Größe $x(n)'$ ist der mit dem Modell der Sekundärstrecke \hat{S} gefilterte Wert des Referenzsignals. Die Sekundärstrecke S ist die Übertragungsfunktion vom Aktoreingang zum Sensorausgang. Das Modell der Sekundärstrecke wird auch als Vorfilter bezeichnet. Die Abbildung 8.4 zeigt den Aufbau des Regelkreises mit Vorfilter.

Die Sekundärstrecke verändert den Betrag und die Phase der Stellgröße $y(n)$, wobei die Phasenänderung das Reglerverhalten maßgeblich beeinflusst [38]. Durch Filterung des Referenzsignals $x(n)$ mit der Sekundärstrecke können diese Einflüsse minimiert werden. Von großer Wichtigkeit ist daher auch die Bestimmung eines möglichst exakten Modells der Sekundärstrecke. Das Modell der Sekundärstrecke



Als Regelstrecke P wird in der numerischen Simulation das analytische Modell der Platte verwendet, das neben dem Krafteingang der Störgröße die Beeinflussung der Platte sowohl mit einer weiteren Punktkraft (Shaker) als auch mit einem Piezopatch ermöglicht. Um die STI als Regelgröße verwenden zu können, sind nach dem 2-Aufnahmeverfahren vier Beschleunigungsaufnehmer, also zwei pro Koordinatenrichtung nötig.



92

Subtraktion des Winkels des ersten Sensors, für jeden Strang der relative Phasenwinkel zwischen den Beschleunigungen berechnet. Aus dem Momentanwert (Betrag) und der Phase wird eine komplexe Beschleunigung ermittelt, mit der die STI berechnet werden kann. Der Betrag der STI dient als Fehlersignal. Das System mit der Beschleunigung als Regelgröße hat eine wesentlich einfachere Struktur als der beschriebene STI-Regler auf Basis des 2-Aufnahmeverfahrens. Dieses Regelsystem zur Schwingungskompensation beeinflusst die Beschleunigung in der Mitte der symmetrisch aufgebauten Sensoranordnung des STI-Regelungsverfahrens. Der Beschleunigungswert wird direkt als Eingangsgröße des adaptiven Filters verwendet und dient als Regelgröße. Da dieses Regelungskonzept häufig verwendet wird, soll der Regler auf STI-Basis mit den Ergebnissen dieses Reglers verglichen werden.

In weiteren Untersuchungen wurde auch die Schwinggeschwindigkeit, die proportional zur abgestrahlten Schallleistung ist, als Regelgröße verwendet. Da die Strukturschwingungen mit einem Beschleunigungsaufnehmer gemessen werden, ist zur Bestimmung der Schwinggeschwindigkeit eine numerische Integration nötig. Da der Integrator eine Polstelle auf der Imaginärachse im Pol-Nullstellen-Diagramm besitzt und damit für sich gesehen grenzstabil ist [36], kann er die Stabilität von Regelkreisen negativ beeinflussen. In numerischen und experimentellen Simulationen hat sich gezeigt, dass die Verwendung der Schwinggeschwindigkeit als Regelgröße zu Instabilitäten führt. Unter Verwendung der Beschleunigung als Regelgröße konnten wesentlich bessere Ergebnisse erzielt werden.

8.4 Numerische Simulation der geregelten Systeme

Die vorgestellten Systeme zur Schwingungskompensation wurden sowohl mit einer zweiten Kraft als auch mit dem Piezopatch zur Aufbringung der Gegenkraft betrieben. In diesem Abschnitt werden nur die Ergebnisse des Systems mit einem Shaker als Störgröße und dem Piezopatch als Gegenkraft gezeigt. Die Ergebnisse mit dem zweiten Shaker als Gegenkraft unterscheiden sich nur unwesentlich von diesen Ergebnissen. Die Simulationszeit beträgt drei Sekunden, nach einer Sekunde wird der Regelkreis aktiviert. Die Anregung erfolgt monofrequent mit einem Sinussignal der Frequenz 76 Hz (Anregung der 1-2-Mode).

Vergleicht man das Zeitbereichsverhalten beider Regelstrategien, wird deutlich, dass die STI-Regelung (Abkürzung STI in der Legende) im Vergleich zur Regelung der Beschleunigung (Abkürzung b in der Legende) die höhere Dynamik hat, was in Abbildung 8.6 gezeigt wird. Die Schwinggeschwindigkeit kann mit der STI-Regelung deutlich schneller reduziert werden, die maximal erreichbare Reduktion ist bei beiden Systemen nahezu identisch (92,3 % bei der Beschleunigungsregelung, 93,3 % bei der STI-Regelung), was auch durch die FFT im Frequenzbereich bis 500 Hz verdeutlicht wird. Die FFT beider Systeme im Vergleich zum unregulierten System wird für den eingeschwungenen Zustand ($t > 2,5$) s in Abbildung 8.7 gezeigt. Das Regelsystem mit Beschleunigungsregler reduziert die Geschwindigkeit im Sensorpunkt um 22,5 dB, das System mit STI-Regelung um 23,2 dB.

Abbildung 8.7 verdeutlicht einen Nachteil der STI-Regelung: Die STI-Regelung regt im eingeschwungenen Zustand deutlich mehr hochfrequente Oberschwingungen an als die Beschleunigungsregelung. Die Oberschwingungen entstehen durch das Ausschneiden des Vektors $x(n)'$ (siehe Gleichung 8.4) mit einem Rechteckfenster aus dem Zeitsignal des mit dem Modell der Sekundärstrecke gefilterten Referenz-

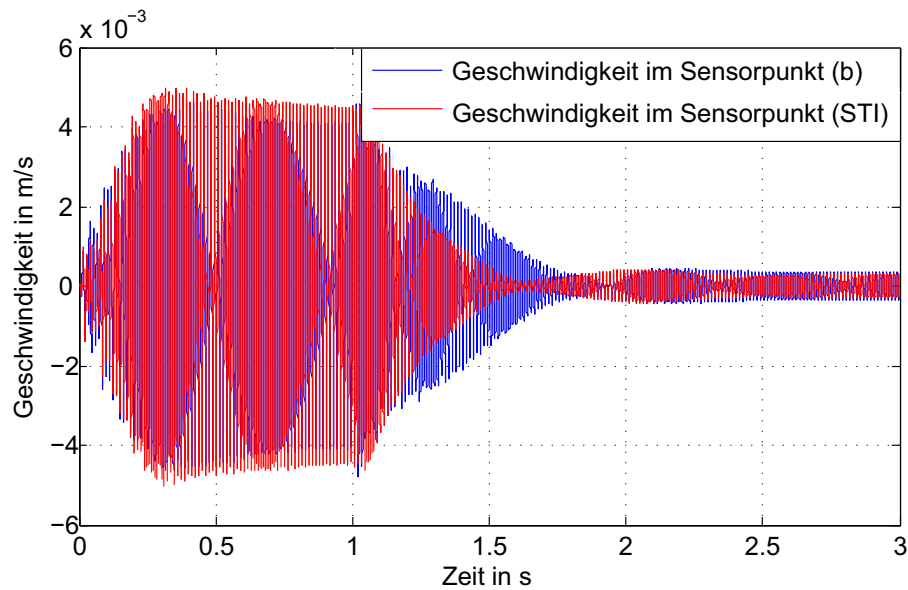


Abbildung 8.6: Zeitverlauf der Schwinggeschwindigkeit der geregelten Systeme, Beschleunigungsregelung (b) blau, STI-Regelung (STI) rot

signals. Diese werden durch die numerische Berechnung des Phasenwinkels aus den komplex erweiterten Beschleunigungen noch verstärkt, weshalb sie insbesondere bei dem System mit STI-Regler zu beobachten sind. Dies konnte durch die Bestimmung der FFT vor und nach den entsprechenden Blöcken im Simulink-Modell nachgewiesen werden. Die Amplituden dieser Oberschwingungen liegen jedoch alle mehr als 25 dB unterhalb der Amplitude der dominierenden Frequenz (Anregungsfrequenz) bei 76 Hz und tragen daher nicht wesentlich zum Summenpegel bei.

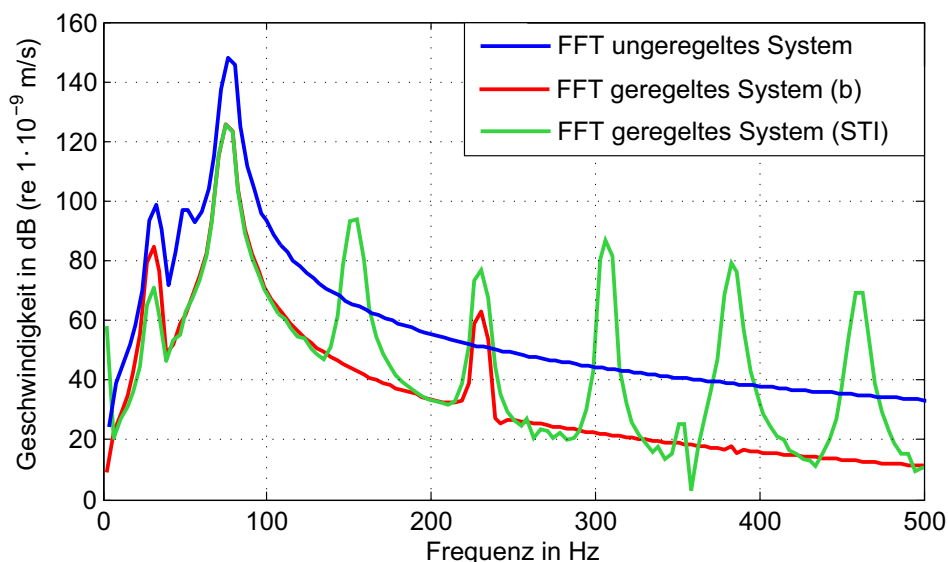


Abbildung 8.7: Frequenzbereichsdarstellung der Schwinggeschwindigkeit der geregelten Systeme, Beschleunigungsregelung (b) blau, STI-Regelung (STI) rot

Der STI-Verlauf bei 76 Hz (1-2-Mode) (Abbildung 8.8) zeigt das bei dieser Frequenz typische Muster mit zwei Wirbeln und ist farbig mit der Divergenz der STI hinterlegt. Der Piezopatch und die Inte-

grationsgrenzen zur Leistungsberechnung sind rechts oben eingezeichnet, genauso wie der Beschleunigungssensor, der durch eine Raute markiert ist. Die Punktkraft links unten und die dazugehörigen Integrationsgrenzen sind ebenfalls eingezeichnet und werden durch die Divergenz der STI zusätzlich rot hervorgehoben.

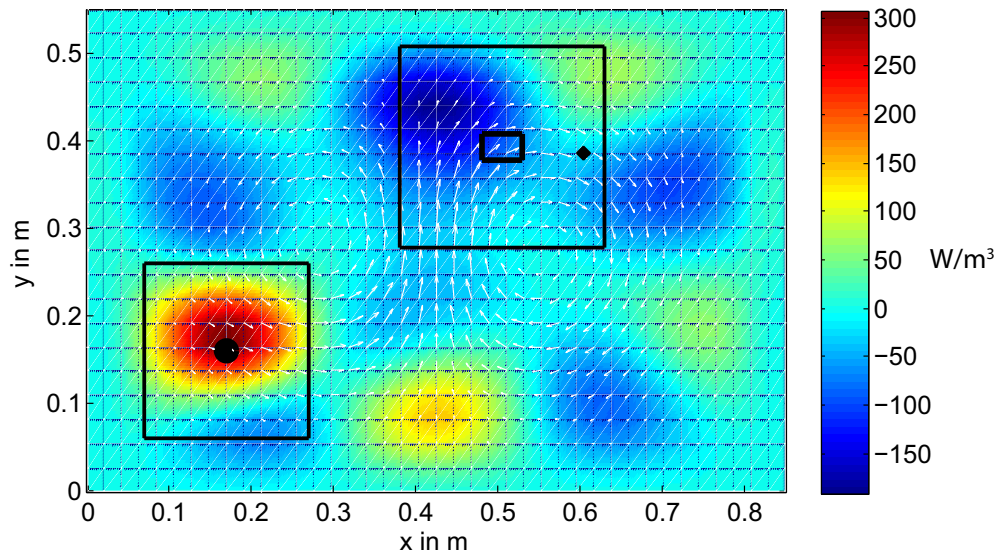


Abbildung 8.8: STI-Verlauf des unregulierten Systems bei 76 Hz (1-2-Mode)

Vergleicht man den STI-Verlauf des unregulierten Systems (8.8) mit den STI-Verläufen der geregelten Systeme im eingeschwungenen Zustand (8.9), so wird deutlich, dass der Regeleingriff den STI-Verlauf stark beeinflusst und sich der STI-Verlauf auch zwischen den Regelkonzepten unterscheidet, obwohl die erreichte Reduktion der Geschwindigkeit nahezu identisch ist.

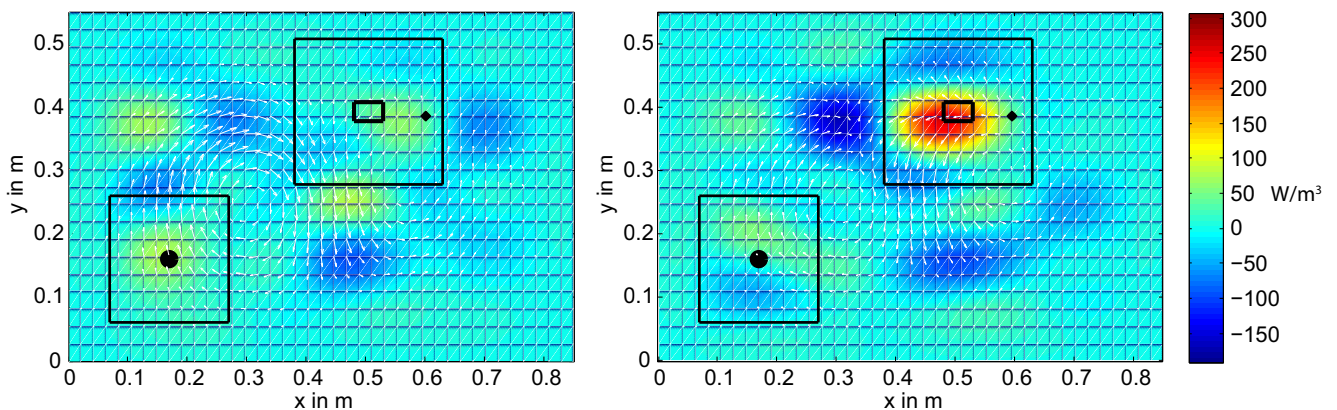


Abbildung 8.9: STI-Verlauf der geregelten Systeme, links Beschleunigungsregelung, rechts STI-Regelung bei 76 Hz (1-2-Mode)

Bei beiden Verfahren kann der Betrag der STI im Sensorpunkt stark verringert werden, es stellt sich jedoch abhängig vom Regelkonzept ein komplett anderes energetisches Gleichgewicht auf der Platte ein. Während bei Verwendung der Beschleunigung als Regelgröße im STI-Verlauf und bei der Divergenz weder der Shaker noch der Piezopatch als eindeutige Quelle auftreten (Abbildung 8.9), wird durch den

Piezopatch dem System mit STI-Regler eindeutig Leistung zugeführt. Daraus ergibt sich der unterschiedliche Verlauf der STI im Bereich des Piezopatches in Abhängigkeit von den Regelkonzepten. Bei beiden Systemen zur Schwingungskompensation dreht sich der Verlauf des Realteils der STI auf der Platte um. Die Reduktion der Amplituden erfolgt demnach durch Überlagerung mit Wellen, die sich in gegensätzlicher Richtung zum ursprünglichen Verlauf der Wanderwelle ausbreiten.

Aus der zeitlich gemittelten STI kann die mittlere Leistungsaufnahme und die Leistungsabgabe der Aktoren berechnet und wie in Abbildung 8.10 in einem Balkendiagramm dargestellt werden.

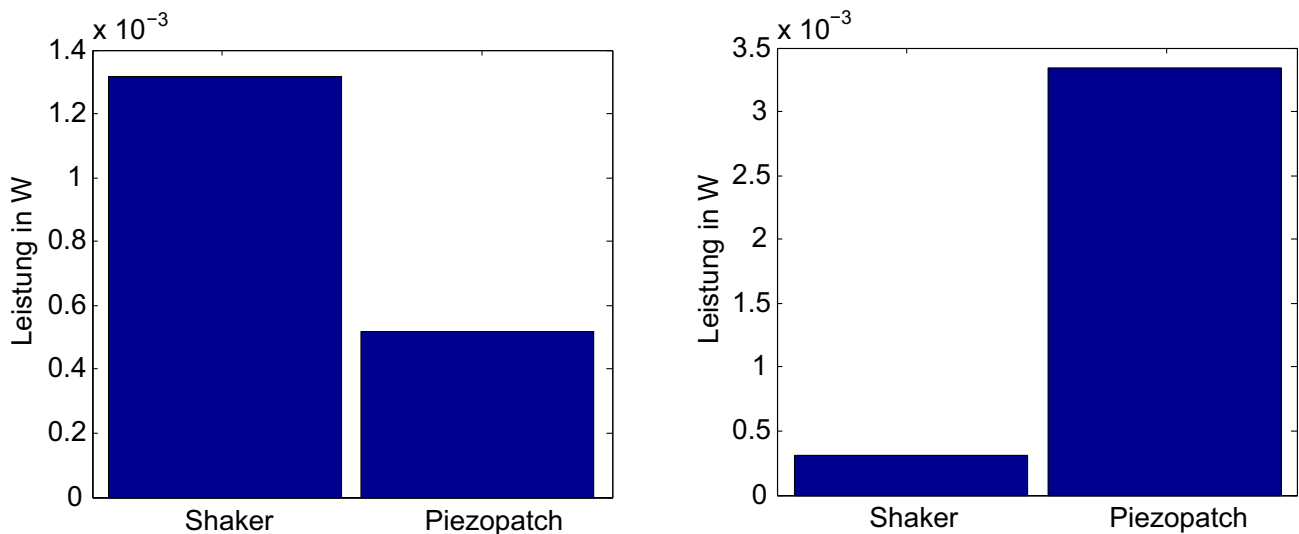


Abbildung 8.10: Zu- und abgeführte Leistung der Aktoren, links Beschleunigungsregelung, rechts STI-Regelung

Wie schon beschrieben, ergeben sich durch die Regelung deutliche Unterschiede im STI-Verlauf auf der Platte. Der Phasenwinkel zwischen der Schwinggeschwindigkeit auf der Platte und der zugeführten Kraft, die maßgeblich für die Wirkleistung ist, die dem System zugeführt wird, stellt sich im Falle der STI-Regelung so ein, dass der Piezoaktor deutlich als Quelle hervortritt, was durch die Leistungsmessung mittels Ringintegral bestätigt wird (Abbildung 8.10). Für eine nahezu identische Reduktion der Schwingungen auf der Platte benötigt die STI-Regelung im Vergleich zur Beschleunigungsregelung mehr Wirkleistung, die dem System zugeführt wird. Dies ist als Nachteil der STI-Regelung zu bewerten. Ein Vorteil für die STI-Regelung ergibt sich, wenn man die über die Platte gemittelte STI betrachtet (siehe Abbildung 8.11). Die STI-Regelung kann die mittlere STI etwas stärker reduzieren als der Beschleunigungsregler. Darüber hinaus tritt bei der Beschleunigungsregelung beim Zuschalten der Regelung ($t = 1$ s) ein Energieimpuls auf, der bei der STI-Regelung nicht zu beobachten ist. Dieser Impuls führt dazu, dass in der Einschwingphase ($1\text{ s} < t < 2\text{ s}$) des Systems mit Beschleunigungsregelung mehr unerwünschte Oberschwingungen angeregt werden. Die Entstehung dieses Impulses kann mit der für den fx-LMS-Regler gewählten Schrittweite μ erklärt werden. Die im Vergleich zum STI-Regler größere Schrittweite führt dazu, dass der Beschleunigungsregler die STI kurz nach Zuschalten des Reglers etwas schneller reduzieren kann (siehe Abbildungen 8.11 und 8.12). Somit entsteht aber auch kurzzeitig eine große Aktorkraft die zu dem beobachteten Energieimpuls führt. Für den Beschleunigungsregler stellt die

gewählte Schrittweite μ dennoch einen sehr guten Kompromiss aus Dynamik und maximal erreichbarer Reduktion der Schwingungsamplituden dar.

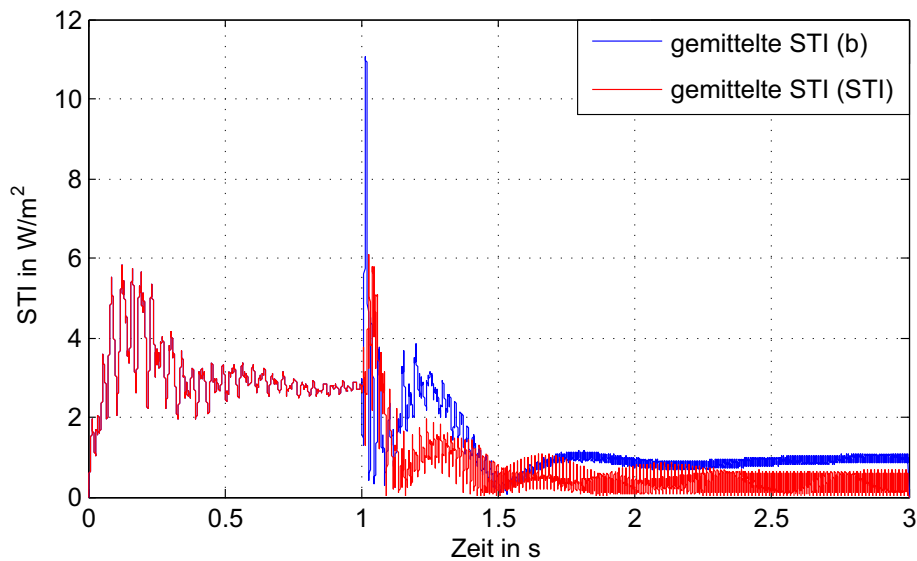


Abbildung 8.11: Über die Platte gemittelte STI im Zeitbereich, Beschleunigungsregelung (b) blau, STI-Regelung (STI) rot

Abbildung 8.12 zeigt den Zeitverlauf der STI im Mittelpunkt des Sensorarrays, links für die Beschleunigungsregelung, rechts für die STI-Regelung. Die rote Kurve beschreibt den exakten Zeitverlauf der Amplitude der STI, die mit der Frequenz von 76 Hz (Anregungsfrequenz) um den Mittelwert (blau) schwankt.

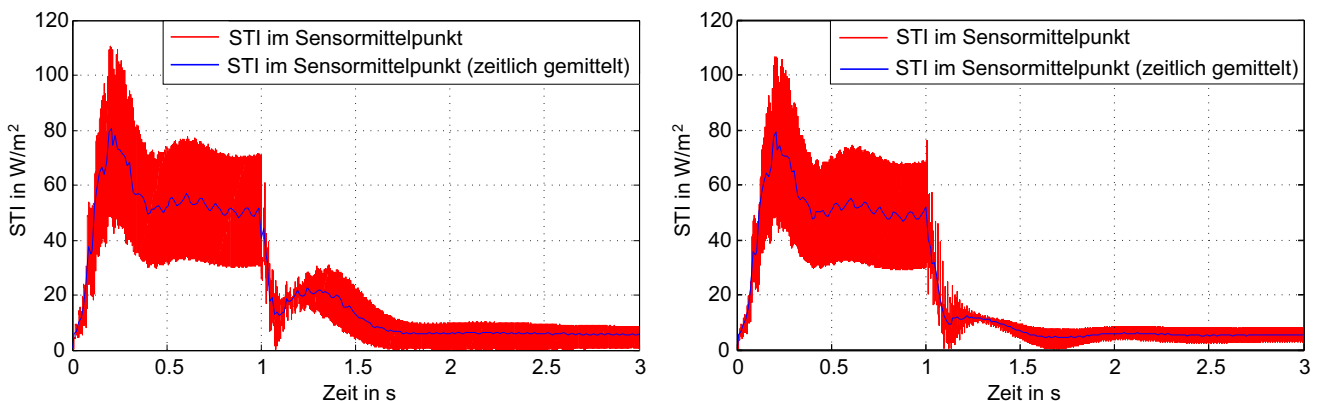


Abbildung 8.12: STI im Sensorpunkt im Zeitbereich, links Beschleunigungsregelung, rechts STI-Regelung

Auch in dieser Darstellung ist ein weiterer Vorteil der STI-Regelung gegenüber der Beschleunigungsregelung zu erkennen. Der Überschwinger nach dem Zuschalten des Reglers fällt bei der STI-Regelung geringer aus, zudem ist die Amplitude der STI nach dem Reglereingriff etwas geringer, die Mittelwerte sind nahezu identisch. Auch dieser Überschwinger kann mit der Wahl der Schrittweite μ erklärt werden. Bei zu großer Schrittweite schießt das Verfahren über das Minimum der Fehlerfunktion hinaus, was eine Ursache für den Überschwinger sein kann. Solange das Verfahren weiterhin konvergiert, bleibt die Stabilität des Systems erhalten [12].

Das Systemverhalten bei breitbandiger Anregung wurde ebenfalls untersucht. Als Störgröße wurde eine Folge von Rechteckimpulsen verwendet. Die Simulationsergebnisse werden im Anhang A.7 gezeigt.

8.5 Experimentelle Validierung der Simulationsergebnisse

Die Platzierung der Aktoren und Sensoren auf der Platte entspricht der Anordnung in der numerischen Simulation des aktiven Systems, die in Abbildung 8.2 gezeigt wird. Als Regler wird wie in der numerischen Simulation ein adaptiver fx-LMS-Regler verwendet, der zum einen die STI, berechnet mit dem 2-Aufnahmeverfahren, (vgl. Abschnitt 8.3) und zum anderen als Vergleich die Beschleunigung regelt. Die Struktur Systems mit STI-Regler wird in Abbildung 8.5 gezeigt, die Berechnung der komplexen Beschleunigungen zur Bestimmung der STI, die Gegensteuerung und die Erzeugung des Anregungssignals wurden auf einem dSpace-System implementiert. Da die Ausgangssignale des dSpace-Systems Treppenförmig aufweisen, müssen diese mit einem analogen Tiefpass gefiltert werden, um damit die durch die Treppenfunktion entstehenden hochfrequenten Signalanteile zu entfernen. Mit Hilfe der Software ControlDesk können alle Parameter des geregelten Systems in Echtzeit manipuliert werden. Für alle Messungen wurde die Störkraft, die durch den Shaker aufgebracht wird, auf 1 N eingestellt. Als Frequenz wurde wie in der numerischen Simulation die Eigenfrequenz bei 76 Hz gewählt, da sich hier die 1-2-Mode und die 1-3-Mode überlagern und einen charakteristischen Wirbel bilden. Folgende Abbildung zeigt die Messergebnisse bei harmonischer Anregung mit 76 Hz im Zeitbereich.

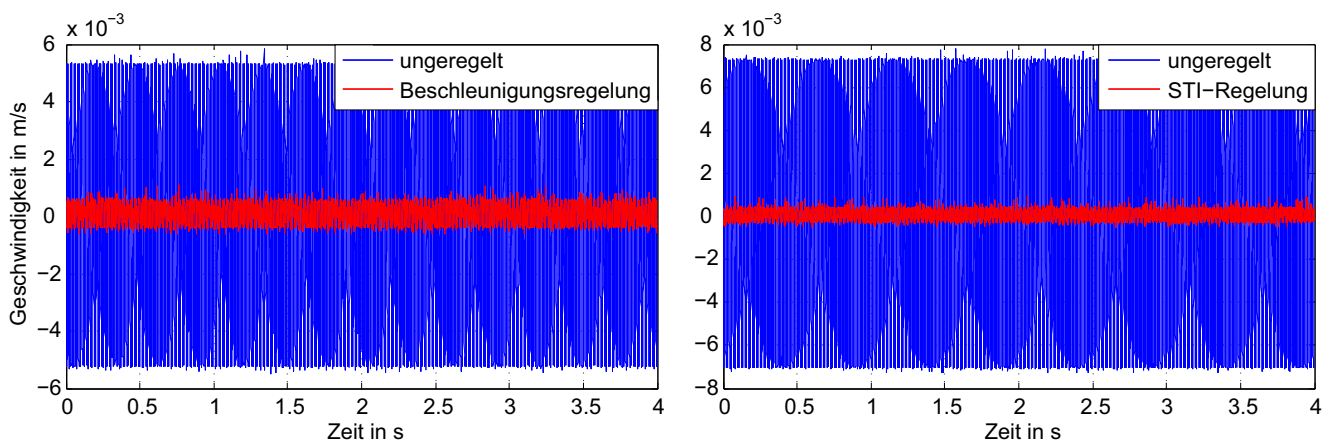


Abbildung 8.13: Zeitverlauf der Schwinggeschwindigkeit der geregelten Systeme, Beschleunigungsregelung links, STI-Regelung rechts

In Abbildung 8.13 ist die Schwinggeschwindigkeit beider Regelsysteme mit und ohne Schwingungskompensation dargestellt. Die Schwinggeschwindigkeiten variieren zwischen den Messungen, da sich die Eigenfrequenzen und damit auch die Amplituden aufgrund äußerer Einflüsse (Temperatur, Spannungs- und Einspannungsverhältnisse) leicht verschoben haben. Der eben beschriebene Effekt führt dazu, dass für das System mit Beschleunigungsregelung die Schwinggeschwindigkeit von 0,00544 m/s auf 0,00078 m/s um 86 % reduziert. Verwendet man die STI-Regelung, kann die Schwinggeschwindigkeit von 0,00731 m/s auf 0,00062 m/s um 92 % verringert werden. Im Vergleich dazu konnte in der numerischen Simulation die Schwinggeschwindigkeit mit der Beschleunigungsregelung um 92,3 % und mit der STI-Regelung um 93,3 % reduziert werden. Damit erzielt die STI-Regelung im Experiment ein mit der

numerischen Simulation nahezu identisches Ergebnis.

Die Spektren in Abbildung 8.14 zeigen die Frequenzbereichsdarstellung der Schwinggeschwindigkeit der geregelten und ungeregelten Systeme im eingeschwungenen Zustand. Im Falle der Beschleunigungsregelung kann die Schwinggeschwindigkeit um 22,5 dB reduziert werden, im Falle der STI-Regelung kann eine Reduktion von 28,2 dB erreicht werden. Ein Vergleich beider Systeme zeigt, dass die STI-Regelung im eingeschwungenen Zustand, im Gegensatz zur numerischen Simulation, weniger höhere harmonische Signalanteile anregt als das System mit Beschleunigungsregelung.

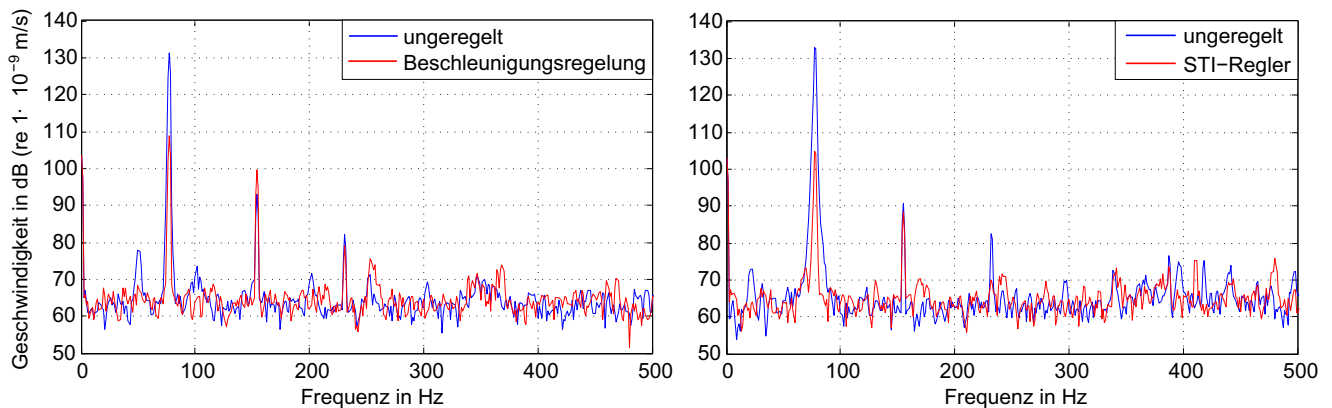


Abbildung 8.14: FFT der Schwinggeschwindigkeit der geregelten Systeme, Beschleunigungsregelung links, STI-Regelung rechts

Der STI-Verlauf des Systems mit Beschleunigungsregelung wird in Abbildung 8.15 dem STI-Verlauf des ungeregelten Systems gegenübergestellt. Die Abbildungen sind in diesem Fall farbig mit dem Betrag des Realteils der STI hinterlegt. Die Darstellung des Betrags des Realteils der STI hebt Bereiche der Struktur mit großem Energiefluss hervor. Dies lässt zwar keine direkten Rückschlüsse auf die Quellen- und Senkenverteilung auf der Struktur zu, allerdings sind somit die Bereiche, in denen das Regelsystem die STI reduziert, direkt erkennbar. Die Störkraft (Shaker) ist durch einen Kreis unten links auf der Platte markiert, der Piezopatch wird durch das kleine Rechteck oben rechts dargestellt. Der Sensorpunkt, an dem die Schwinggeschwindigkeit und die STI bestimmt werden, ist mit einem Kreis oben rechts markiert. Die großen Rechtecke um den Shaker und den Piezopatch sind die Grenzen des Integrationsbereichs für die Leistungsberechnung. Man erkennt im rechten Bild der Abbildung 8.15, dass sowohl der Verlauf der STI als auch der Betrag deutlich beeinflusst werden. Die STI fließt fast direkt von der Quelle in die Senke, die Wirbelstruktur ist kaum noch zu erkennen. Die STI im Sensorpunkt kann in diesem Experiment nicht ganz zu 0 reduziert werden. Der Betrag der STI auf der Platte reduziert sich durch den Reglereingriff um etwa eine Größenordnung.

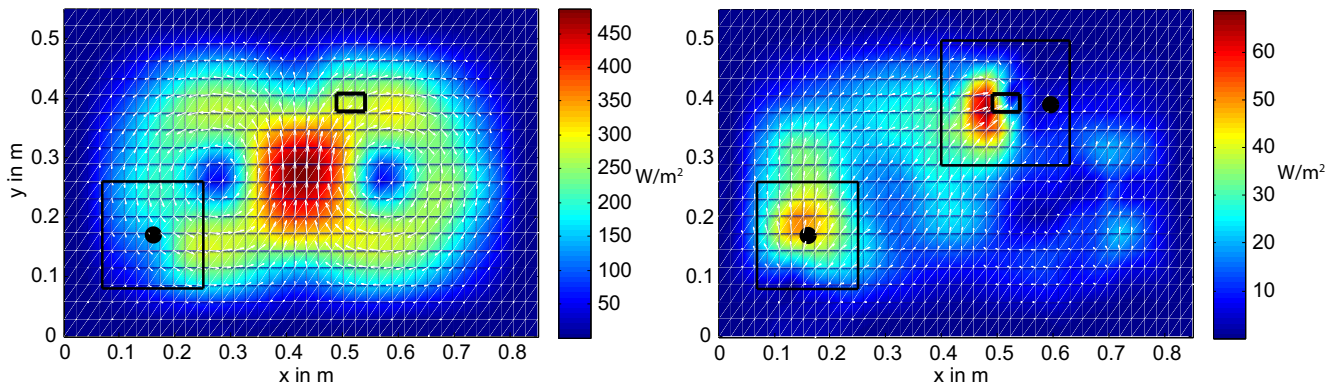


Abbildung 8.15: STI-Verlauf bei 76 Hz (1-2-Mode), ungeregelt links, Beschleunigungsregelung rechts

In Abbildung 8.16 sind der STI-Verlauf des ungeregelten Systems und des Systems mit STI-Regelung zu sehen. Auch dieses Regelsystem ändert den Verlauf der STI, jedoch nicht so sehr wie die Beschleunigungsregelung in Abbildung 8.15. Das Wirbelmuster ist in dieser Abbildung auch bei aktiver Schwingungskompensation noch deutlich erkennbar, die Richtung der STI Vektoren hat sich jedoch umgekehrt. Wie in der numerischen Simulation wird durch den Eingriff des Reglers eine Wanderwelle erzeugt, die sich entgegengesetzt zur ursprünglichen Richtung ausbreitet und die Plattenschwingungen durch Überlagerung reduziert. Der Betrag der STI kann auch durch die STI-Regelung um etwa eine Größenordnung reduziert werden.

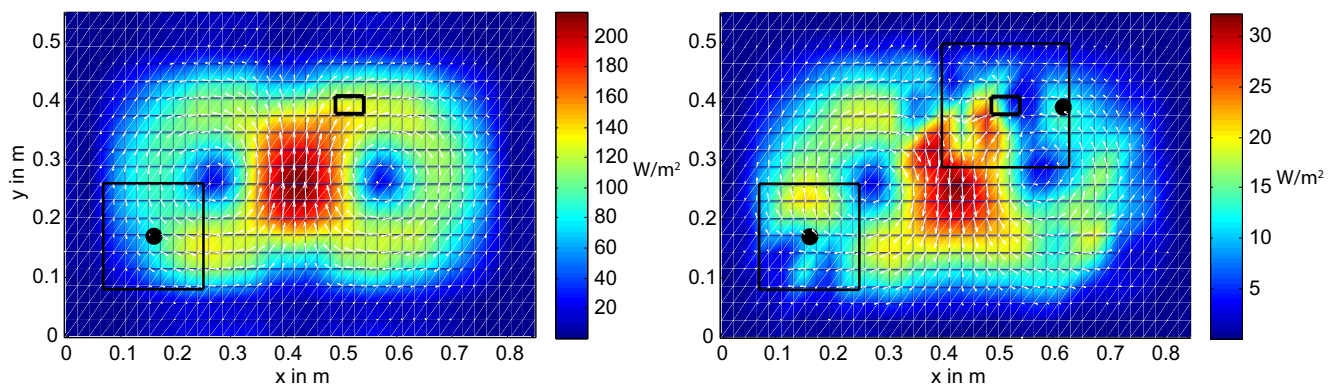


Abbildung 8.16: STI-Verlauf bei 76 Hz (1-2-Mode), ungeregelt links, STI-Regelung rechts

Die zu- und abgeführte Leistung der geregelten Systeme wird in Abbildung 8.17 gezeigt. Der Shaker (Störkraft) führt in beiden Fällen dem System Energie zu. Der Piezopatch entzieht dem System mit Beschleunigungsregelung Energie, was auch im STI-Verlauf in Abbildung 8.15 deutlich wird. Verwendet man die STI-Regelung, wird dem System durch den Piezopatch Energie zugeführt (siehe STI-Verlauf Abbildung 8.16). Analog zur numerischen Simulation wird für die STI-Regelung mehr Wirkleistung benötigt, um eine nahezu identische Reduktion der Schwingungen auf der Platte im Vergleich zur Beschleunigungsregelung zu erzielen.

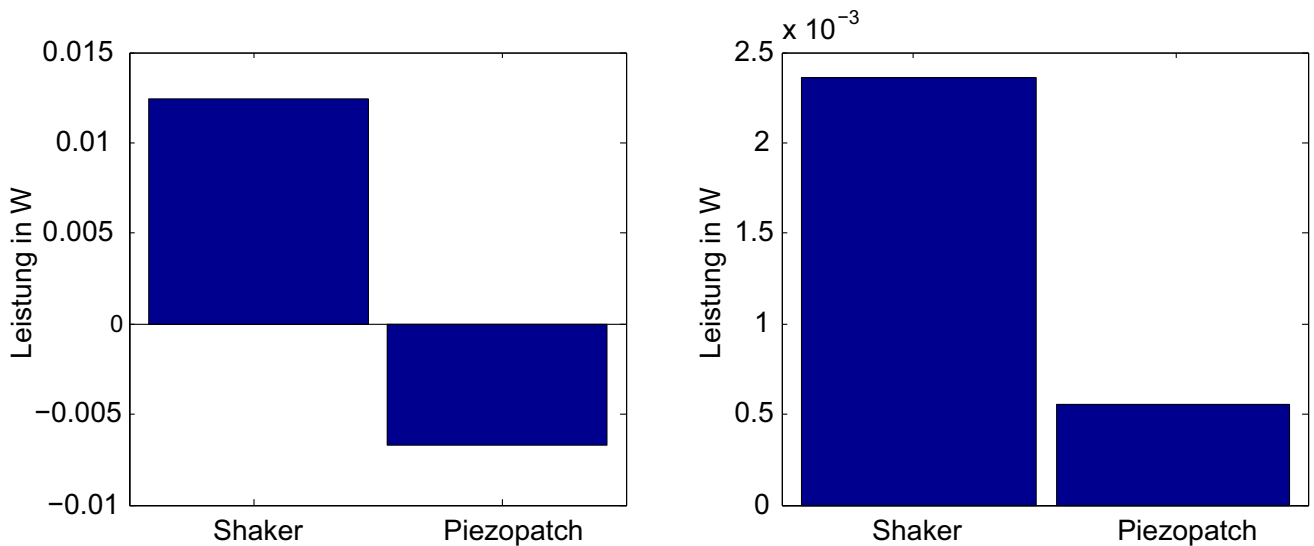


Abbildung 8.17: Zu- und abgeführte Leistung der Aktoren, Beschleunigungsregelung links, STI-Regelung rechts

Mit der STI-Regelung ergeben sich in dieser experimentellen Untersuchung bessere Ergebnisse, da sie höhere harmonische Frequenzen stärker unterdrückt als die Beschleunigungsregelung und darüber hinaus die Schwingungsamplituden etwas stärker reduziert.

Neben der harmonischen Anregung wurde das Verhalten der geregelten Systeme bei Impulsanregung im Versuch untersucht. Die Ergebnisse der Messungen finden sich im Anhang A.7.

In diesem Kapitel wurden die in dieser Arbeit entwickelten Methoden zur energetischen Bewertung von Maßnahmen zur Schwingungsminderung für die Untersuchung aktiver Systeme eingesetzt. Somit konnte sowohl in der numerischen als auch in der experimentellen Simulation gezeigt werden, dass mit der STI-Regelung ein insgesamt besseres Ergebnis erzielt werden kann als mit der Beschleunigungsregelung. Die STI im Sensorpunkt sowie die Gesamtenergie im System kann mittels STI-Regelung in der numerischen und experimentellen Simulation deutlich reduziert werden, womit auch eine Verringerung der Schwingungsamplituden einhergeht. Die erreichte Reduktion der Schwinggeschwindigkeit und der STI im Sensorpunkt ist bei der STI-Regelung größer als bei der Beschleunigungsregelung. Darüber hinaus konnte durch beide geregelten Systeme auch der STI-Verlauf in der Struktur beeinflusst werden. Bislang ist es jedoch noch nicht gelungen, durch Anpassung der Regelparameter einen bestimmten STI-Verlauf in der Struktur bei gleichzeitiger Minimierung der STI im Sensorpunkt zu erzeugen. Somit ergibt sich aus diesem Kapitel ein direkter Anknüpfungspunkt für nachfolgende Arbeiten.

9 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurden Methoden entwickelt, um eine energetische Bewertung passiver und aktiver Maßnahmen zur Schwingungsminderung zu ermöglichen. Aus einer Reihe von Näherungsverfahren zur Berechnung der STI konnte ein Verfahren ausgewählt werden, das sowohl für die qualitative als auch für die quantitative Bestimmung der STI sehr gut geeignet ist. Mit Hilfe eines Mittelungsverfahrens ist es gelungen, die STI auch in experimentellen Simulationen sehr genau zu bestimmen. Somit ist es möglich, mit geschlossenen Integralen aus der STI die Leistung zu bestimmen, die beispielsweise ein Aktor eines aktiven Systems der Struktur zuführt. Durch Parameterstudien konnte der Abstand des Integrals von der Quelle gefunden werden, für den der Fehler der Leistungsberechnung minimal ist. Die Anwendung dieser Methoden erfolgt an einem aktiven System, das einen direkten Eingriff in den Energiefluss ermöglicht. Im Folgenden werden die wesentlichen Ergebnisse der Arbeit zusammengefasst. Die Darstellung folgt dabei den in Abschnitt 1.2 formulierten Zielsetzungen.

Ein mögliches Verfahren zur experimentellen Bestimmung des in-plane-Anteils der STI wird in einem Ausblick erläutert. Abschließend wird der verbleibende Forschungsbedarf dargelegt.

9.1 Wesentliche Ergebnisse

1. Modellbildung und Berechnung der STI

Ein analytisches Modell einer Platte basierend auf der KIRCHHOFFSCHEN Plattentheorie wurde erstellt. Dieses Modell wird für verschiedene numerische Simulationen sowie für Parameterstudien verwendet. Um die im Experiment vorgefundenen Einspannungsverhältnisse der Platte in der numerischen Simulation abbilden zu können, wurden die Eigenformen der Platte mit einem linearen Ansatz aus den Eigenformen der festen Einspannung und der gelenkigen Lagerung berechnet (Abschnitt 2.2). Darüber hinaus wurde ein piezoelektrischer Plattenaktor (Piezopatch) modelliert und in das analytische Plattenmodell eingebunden (Abschnitt 2.3). Die durch den Piezopatch auf die Platte wirkenden Momente wurden mit Linienmomenten, die an den Rändern des Aktors wirken, modelliert. Für Simulationen und Parameterstudien stand damit ein Zustandsraummodell der Platte zur Verfügung, das neben dem üblichen Krafteingang (Punktkraft) die Simulation eines Piezopatches ermöglichte.

Die grundlegenden Gleichungen zur Berechnung der STI aus Verschiebungen ergaben sich unter Verwendung des analytischen Plattenmodells (Abschnitt 3.2). Darauf aufbauend wurde der Einfluss von Dissipation und Dämpfung auf die STI bestimmt (Abschnitt 3.3) und der Zusammenhang zwischen kinetischer und potentieller Energie und STI beschrieben (Abschnitt 3.4).

2. Vergleich verschiedener Verfahren zur Berechnung der STI

Bislang existiert kein direkter Vergleich verschiedener Näherungsverfahren zur Berechnung der STI. Um ein Verfahren zur Berechnung der STI auszuwählen, das für die weiteren Untersuchungen optimal geeignet ist, wurde eine Fehlerbetrachtung durchgeführt. Hierfür wurden aus der Literatur bekannte Verfahren, das 2-Aufnehmerverfahren, das 8-Aufnehmerverfahren, das Fourier-Verfahren und zwei auf numerischen Ableitungen basierende Verfahren, das Gradientenverfahren und das CDS-Verfahren mit der analy-

tischen Lösung der STI für gelenkig gelagerte Platten verglichen (Kapitel 4). Das 2-Aufnahmerverfahren und das 8-Aufnahmeverfahren sind Näherungsverfahren und basieren auf Vereinfachungen der Berechnungsgleichungen der STI. Im Gegensatz dazu lösen das Fourier-Verfahren, das Gradientenverfahren und das CDS-Verfahren die Berechnungsgleichungen der STI direkt durch numerische Berechnung der auftretenden Ableitungen. Im Vergleich zur analytischen Lösung kann mit allen Berechnungsmethoden mit Ausnahme des Fourier-Verfahrens der STI-Verlauf auf der Struktur im betrachteten Frequenzbereich sehr gut wiedergegeben werden (Abbildung 4.14).

Des Weiteren wurde der relative Fehler des Betrags des Realteils der STI aller betrachteter Verfahren mit der analytischen Lösung der STI verglichen (Abbildung 4.15). Die Beträge der STI des 2- und 8-Aufnahmeverfahrens weichen deutlich von der analytischen Lösung ab, auch die Fehler des Fourier-Verfahrens sind im betrachteten Frequenzbereich erheblich. Das Gradientenverfahren und das CDS-Verfahren zeigen nur im Bereich um die Quelle eine nicht vernachlässigbare Abweichung von der analytischen Lösung.

Mittels Monte-Carlo-Simulationen wurde das Verhalten der STI-Berechnungsverfahren in Abhängigkeit von der Diskretisierung der Struktur und der Frequenz untersucht (Abschnitt 4.1). In den numerischen Simulationen wurde der Frequenzbereich zwischen 0 Hz und 500 Hz untersucht. Die geringsten Fehler bezogen auf die analytische Lösung ergaben sich für das Gradientenverfahren und das CDS-Verfahren. Der mittlere Fehler des Gradientenverfahrens konvergiert in Abhängigkeit von der Vernetzungsdichte im Vergleich zum CDS-Verfahren etwas langsamer gegen 0 (Abbildung 4.10), dafür ist die Streuung im Vergleich zum CDS-Verfahren etwas geringer (Abbildung 4.12). In Abhängigkeit von der Frequenz steigt der Fehler des Gradientenverfahrens für größer werdende Frequenzen leicht an. Im Gegensatz dazu schwankt der Fehler des CDS-Verfahrens um die 0 %-Fehlerlinie. Das Gradienten- und das CDS-Verfahren sind somit am besten geeignet, um den STI-Verlauf richtig zu berechnen und darüber hinaus quantitativ korrekte Ergebnisse zu bestimmen.

3. Untersuchung der Auswirkung von Messfehlern auf die Berechnung der STI

Um den Betrag und die Richtung des STI-Vektors auch experimentell richtig bestimmen zu können, müssen die Auswirkungen von Messfehlern auf die STI-Berechnung bekannt sein (Abschnitt 5.1). Hierfür wurde die Genauigkeit des Messsystems, d. h., der Fehler zwischen einzelnen, direkt nacheinander gemessenen Messpunkten bestimmt. Die Standardabweichung des Amplitudenfehlers beträgt z. B. bei 34 Hz $\sigma_{Amplitude} = 1,5532 \cdot 10^{-12}$ m, die Standardabweichung des Phasenfehlers beträgt bei dieser Frequenz $\sigma_{Phase} = 0,1423^\circ$. Diese Fehler werden als sehr gering eingestuft. Allerdings führt der Fehler der Phase bei niedrigen Frequenzen zu einer fehlerbehafteten Darstellung der STI in konphas schwingenden Bereichen der Struktur (Abbildung 5.2). Im Bereich großer Phasengradienten (Phasensprünge um 180°) spielen die Messfehler in der Phase keine Rolle, da sie sehr klein im Vergleich zur gesamten Phasenänderung sind. Für höhere Frequenzen wird demnach die STI richtig berechnet (Abbildung 5.4). Werden die Simulationsergebnisse mit der aus der Messung bekannten Standardabweichung für Betrag und Phase beaufschlagt, können die Fehler im Verlauf der STI exakt reproduziert werden.

Mit Hilfe eines Mittelungsverfahrens, das auf die gemessenen Geschwindigkeitsdaten angewendet wird, kann die STI auch für niedrige Frequenzen korrekt berechnet werden (Abschnitt 5.2). Allerdings wird durch die Mittelung auch die Datenbasis verändert, mit der die STI berechnet wird. In der numerischen

Simulation wurde daher untersucht, ab welcher Frequenz der Fehler der STI-Berechnung mit gemittelten Daten größer ist als der Fehler der STI, die aus gestreuten Daten berechnet wurde. Der Fehler des Betrags des Realteils der STI, die aus gemittelten Daten berechnet wurde, ist für die untersuchte Platte ab 123 Hz größer als der Betragsfehler des Realteils der STI, der aus nicht gemittelten Daten berechnet wurde (Abbildung 5.6). Der Richtungsfehler des STI-Vektors ist für gemittelte Daten ab ca. 475 Hz größer als der Fehler der STI bestimmt aus nicht gemittelten Daten (Abbildung 5.7).

Ein allgemeiner Zusammenhang zwischen dem Fehler, dem Seitenverhältnis der Platte und dem Anregungsort wurde in Abschnitt 5.3 mit einer Monte-Carlo-Analyse untersucht. Die Schnittpunkte zwischen den Fehlerkurven des Betrages des STI-Vektors, berechnet aus gemittelten und nicht gemittelten Daten, wurden für verschiedene Seitenverhältnisse der Rechteckplatte bestimmt. Analog wurden die Schnittpunkte für den Winkel des STI-Vektors berechnet. Die Schnittpunkte geben die Frequenz an, bis zu der die Fehler durch die Mittelung geringer sind als beim Rechnen mit gestreuten, nicht gemittelten Daten. Oberhalb dieser Frequenz sollte demnach auf den Einsatz der Mittelung der Daten verzichtet werden. Der Schnittpunkt des Betrages des Realteils der STI liegt für sehr schmale Platten (kleines Seitenverhältnis) etwa beim Dreifachen der ersten Eigenfrequenz und steigt für größer werdende Seitenverhältnisse auf das Sechsfache der ersten Eigenfrequenz an. Der Schnittpunkt des Winkels des Realteils der STI liegt für kleine Seitenverhältnisse beim 18-fachen der ersten Eigenfrequenz und sinkt für größer werdende Seitenverhältnisse auf das Neunfache der ersten Eigenfrequenz.

Durch den Einsatz des Mittelungsverfahrens kann die STI auch in experimentellen Simulationen sehr exakt bestimmt werden. Somit kann die experimentell ermittelte STI als Referenzgröße für die numerische STI-Berechnung verwendet werden.

4. Bestimmung relevanter Einflussfaktoren auf die Leistungsberechnung

Die Leistung, die z. B. ein Aktor einer Struktur zuführt oder entzieht, soll mit einem geschlossenen Integral um den Aktor aus der STI berechnet werden. Mit Hilfe einer Sensitivitätsanalyse wurden die Faktoren identifiziert, die die Leistungsberechnung auf Basis der STI maßgebend beeinflussen (Abschnitt 6.3.1). Als Parameter wurden die Dämpfung, der Integralabstand von der Quelle, die Kraftamplitude und die Stützstellenanzahl betrachtet. Als Zielgröße wurden der Fehler, berechnet aus der Differenz zwischen der zugeführten Leistung (Kraft multipliziert mit der Geschwindigkeit am Anregungspunkt) und der mittels geschlossenem Integral um die Anregungsstelle aus der STI berechneten Leistung, verwendet. Aufgrund der sehr stark nichtlinearen Einflüsse von Frequenz und Plattendicke auf die Zielgrößen wurden diese Größen nicht als Parameter in der Analyse verwendet. Die Sensitivitätsanalyse bei konstanter Frequenz (zweite Eigenfrequenz der Platte) ergab, dass die Integration hauptsächlich durch die Wahl des Integralabstandes von der Quelle sowie von der Kraftamplitude beeinflusst wird (Tabelle 6.2). Mit einer Konvergenzanalyse wurde sichergestellt, dass die Haupteffekte und Totaleffekte aller Parameter konvergieren und der Verlauf keine Sprünge aufweist (Abbildung 6.2).

Der Einfluss der Frequenz wurde untersucht, indem mehrere Sensitivitätsanalysen bei 79 verschiedenen Frequenzen durchgeführt wurden (Abschnitt 6.3.3). Diese Analyse ergab, dass die Werte des Totaleffektes in den Eigenfrequenzen einer deutlich größeren Streuung unterliegen als die Effektgrößen in den Antiresonanzen (Abbildung 6.3). Das System reagiert in den Eigenfrequenzen sensibler auf Parameteränderungen, was zu einer größeren Streuung der Zielgröße und damit auch des Totaleffektes führt. Die

durchgeführte Untersuchung entspricht damit der Betrachtung des ungünstigsten Falles.

Da in der Praxis die Anregungskraft (Störgröße) meist nicht direkt beeinflusst werden kann, wurden in einer Parameterstudie der Einfluss des Integralabstandes von der Quelle und der Einfluss der Diskretisierung der Struktur genauer untersucht (Abschnitt 6.4). Es stellte sich heraus, dass es einen optimalen Abstand der Integrationslinie von der Quelle gibt, bei dem der Fehler der Leistungsberechnung mittels STI minimal wird. Bei geringeren Abständen der Integrallinie von der Quelle nimmt der Fehler zu, da bei gleich bleibendem Gitter immer weniger Stützstellen zur numerischen Berechnung der Leistung verwendet werden können. Für größer werdende Abstände nimmt der Fehler aufgrund des Einflusses der Strukturdämpfung auf die Leistungsberechnung zu (Abbildung 6.5). Eine geringere Anzahl von Messpunkten auf der Struktur führt zu einer größeren Streuung der Ergebnisse der Leistungsberechnung und zu einer Verschiebung des optimalen Abstandes hin zu größeren Abständen. Im Umkehrschluss dazu liegt der optimale Abstand bei feinerer Diskretisierung näher an der Quelle. In experimentellen Untersuchungen konnten diese Ergebnisse bestätigt werden. Somit ist es möglich, die zu- und abgeführten Leistungen eines Systems sowohl in der numerischen als auch in der experimentellen Simulation zu berechnen und damit eine Energiebilanz aufzustellen.

5. Energetische Bewertung aktiver und passiver Strukturen auf Basis der STI

Zur Simulation eines aktiven Systems wurde in Matlab-Simulink ein Regelkreis ausgelegt, der die STI als Regelgröße verwendet (Kapitel 8, Abbildung 8.5). Um die STI als Regelgröße verwenden zu können, wurde der STI-Vektor im Sensorpunkt mit dem 2-Aufnehmerverfahren berechnet. Zum Vergleich wurde ein System zur Schwingungskompensation mit der Beschleunigung als Regelgröße ausgelegt. Als Regler wurde in beiden Fällen ein adaptives fx-LMS-Filter verwendet, als Regelstrecke diente das analytische Modell der Platte mit Piezopatch. Aufbauend auf den bisherigen Untersuchungen konnten die Bewertungsverfahren auf Basis der STI im Frequenzbereich sowie die STI im Zeitbereich verwendet werden, um die geregelten Systeme zu vergleichen und zu bewerten. Man kann durch die Auswertung der STI im Zeitbereich zeigen, dass bei Zuschalten des Reglers mit der Beschleunigung als Regelgröße dem System ein größerer Energieimpuls aufgeprägt wird als bei Verwendung der STI als Regelgröße (Abbildung 8.11). Durch diesen Impuls werden im System mehr unerwünschte hochfrequente Schwingungen angeregt. In der numerischen sowie in der experimentellen Simulation konnte darüber hinaus festgestellt werden, dass das System mit STI-Regler die Schwingungen im Sensorpunkt schneller minimieren kann als das System mit Beschleunigungsregler. Hierbei wird der Verlauf der STI durch den Reglereingriff verändert, der Aufbau der Gegensteuerung erlaubt aber nicht die gezielte Beeinflussung des STI-Verlaufs auf der Struktur.

Auch im Experiment zeigte sich, dass nach dem Reglereingriff das System mit STI-Regelung im Vergleich zur Beschleunigungsregelung die niedrigere Schwinggeschwindigkeit aufweist (Abbildung 8.14).

9.2 Ausblick - Experimentelle Bestimmung des Longitudinalwellenanteils der STI

In der Dissertation von HERING [25] konnte gezeigt werden, dass in vielen realen Strukturen die Weiterleitung der Energie innerhalb der Struktur über den Longitudinalwellenanteil der STI erfolgt. In numerischen FE-Simulationen kann der Longitudinalwellenanteil der STI berechnet werden, eine experimentelle Bestimmung gestaltet sich bislang jedoch als sehr schwierig. McDEVITT [42] bestimmt den

Longitudinalwellenanteil der STI in einem Stab mit einem zweikanaligen Lasersystem, die Ergebnisse sind jedoch für eine praktische Anwendung nicht exakt genug. Mit einem Array aus Beschleunigungsaufnehmern gelang es MANDAL [37], die durch Longitudinalwellen transportierte Energiemenge in einer Platte zu bestimmen, zur Visualisierung des Verlaufs des Longitudinalwellenanteils der STI ist diese Technik jedoch nicht geeignet.

Mit Hilfe eines 3D-Scanning-Laservibrometers ist es möglich, neben den Schwinggeschwindigkeiten senkrecht zur Oberfläche auch die Schwinggeschwindigkeiten in der Strukturebene zu bestimmen. Nach der Kalibrierung des Systems ist die relative Position jedes Messkopfes bezüglich des Messobjektes bekannt, und das Messsystem ist in der Lage, die Anteile des Schwinggeschwindigkeitsvektors in den drei Raumrichtungen zu berechnen. Aus den gemessenen Schwinggeschwindigkeiten wird analog zur Berechnung der STI aus Transversalwellen der Longitudinalwellenanteil (siehe Gleichung (3.21)) durch numerische Ableitungen berechnet. Als Teststruktur dient das so genannte Akustikaquarium, ein Demonstrator am Fraunhofer-Institut für Betriebsfestigkeit und Systemzuverlässigkeit LBF. Die Randbedingungen der im Prüfstand eingespannten Platten entsprechen denen der einfach gestützten Platte. Die Anregung erfolgt über zwei Piezopatches, die an gleicher Position auf der Plattenober- und Unterseite angebracht sind. Mit diesem Aufbau gleichen sich die in die Platte eingeleiteten Biegemomente nahezu aus. Für numerische Simulationen wurde vom Fraunhofer LBF ein FE-Modell zur Verfügung gestellt. Die in analytischen Untersuchungen und numerischen Simulationen identifizierten in-plane-Eigenfrequenzen und -Moden stimmen mit den experimentell bestimmten Werten sehr gut überein. Die Abweichungen der in-plane-Eigenfrequenzen zwischen numerischer und experimenteller Simulation betragen maximal 2,5 %.

Abbildung 9.1 zeigt die achte in-plane-Mode, die in der numerischen Simulation bei 4218 Hz liegt. In der experimentellen Simulation kann diese Mode bei 4295 Hz gefunden werden, die Abweichung zur numerischen Simulation beträgt 1,8 %. Darüber hinaus wird deutlich, dass die experimentell ermittelte Schwingform qualitativ gut mit den Ergebnissen der numerischen Simulation überein stimmt. Dies gilt auch für weitere in-plane-Moden, die sehr gut mit dem 3D-Scanning-Laservibrometer detektiert werden können.

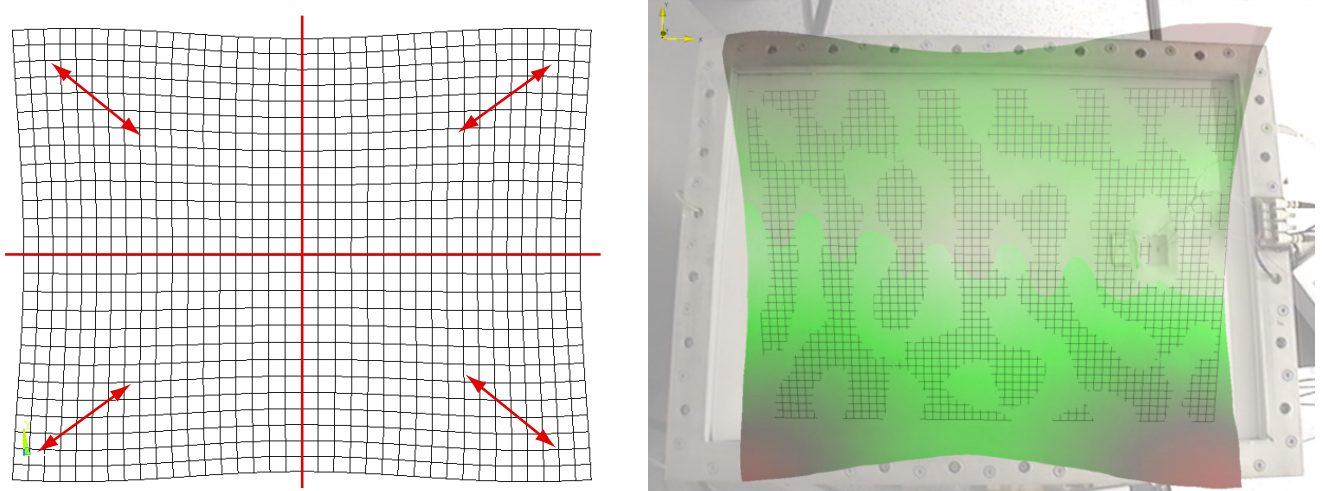


Abbildung 9.1: 8. in-plane-Mode, links numerische Simulation (4218 Hz), rechts experimentelle Simulation (4295 Hz)

Die roten Pfeile in Abbildung 9.1 links deuten an, dass sich bei der gezeigten Schwingform die Ecken der Platte auf die Plattenmitte zu und von ihr wegbewegen. Die Lage der Punkte auf den roten Linien bleibt dabei unverändert. In Plattenebene treten demnach auch bei hohen Frequenzen in großen Bereichen der Struktur gleichphasige Bewegungen auf. In Abschnitt 5.1 wurde bereits gezeigt, dass dies zu einer fehlerbehafteten Berechnung des STI-Vektors führt. Die in Abschnitt 5.2 eingeführte Mittelung kann analog auf die mit dem 3D-Scanning-Laservibrometer gemessenen Daten angewendet werden. Trotz Anwendung des Mittelungsverfahrens können jedoch weniger gute Ergebnisse bei der Bestimmung des Longitudinalwellenanteils der STI erreicht werden, was durch den Vergleich der folgenden Abbildungen verdeutlicht wird.

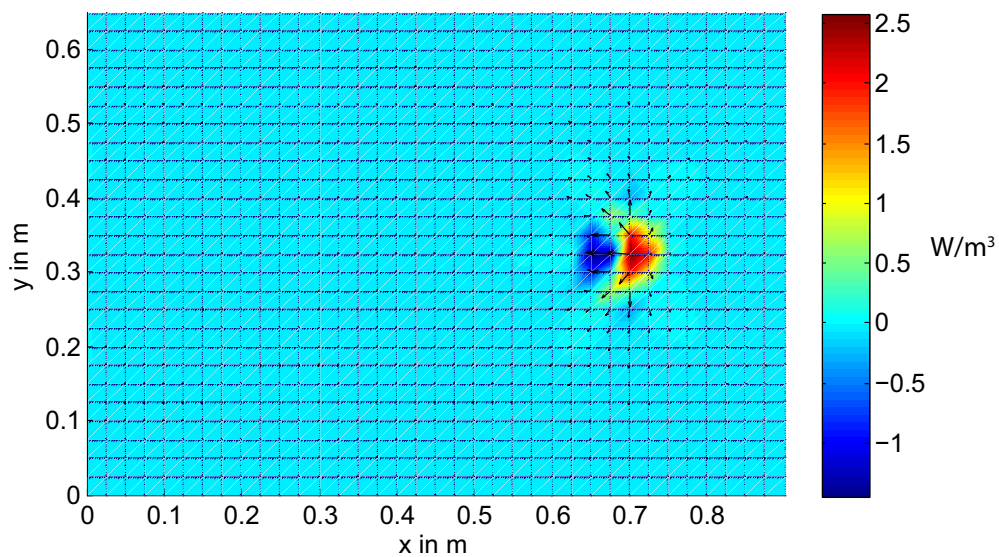


Abbildung 9.2: Numerisch bestimmter in-plane-Anteil der STI der achten in-plane-Mode

Abbildung 9.2 zeigt den in der numerischen Simulation berechneten Verlauf des Longitudinalwellenanteils der STI der achten in-plane-Eigenmode. Die Abbildung ist farbig mit der Divergenz der STI hinterlegt. Aus der Divergenz der STI ist der Piezopatch, der sich rechts auf der Struktur befindet, eindeutig zu erkennen, die STI-Vektoren zeigen radial aus der Quelle.

Der experimentell bestimmte STI-Verlauf (Abbildung 9.3) ist trotz Anwendung des Mittelungsverfahrens deutlich fehlerbehaftet. Vor allem im linken Bereich der Platte treten größere Abweichungen auf. Die Quelle ist aber auch im Experiment durch die Berechnung der Divergenz der STI eindeutig zu identifizieren.

Ein Grund für die großen Abweichungen gegenüber der numerischen Simulation ist, dass ein nicht zu vernachlässigendes Biegemoment in die Platte eingeleitet wurde, obwohl zwei Piezopatches zur Anregung verwendet wurden. Daher sind sogar in den in-plane-Eigenmoden die Schwinggeschwindigkeiten senkrecht zur Oberfläche um bis zu einer Größenordnung größer als die Geschwindigkeiten in Plattenebene. Des Weiteren erfolgt die Aussteuerung der einzelnen Vibrometerkanäle anhand der maximal auftretenden Amplituden. Aufgrund der kleineren Amplituden der Schwinggeschwindigkeiten in Plattenebene ist demnach der Signal-Rauschabstand und die Amplitudenauflösung für diese Geschwindigkeitskomponente geringer. Dies führt zu größerem Messrauschen im in-plane-Anteil des Geschwindigkeitsvektors. Zur Bestimmung des Schwingverhaltens wirkt sich dieser Fehler nicht weiter negativ aus,

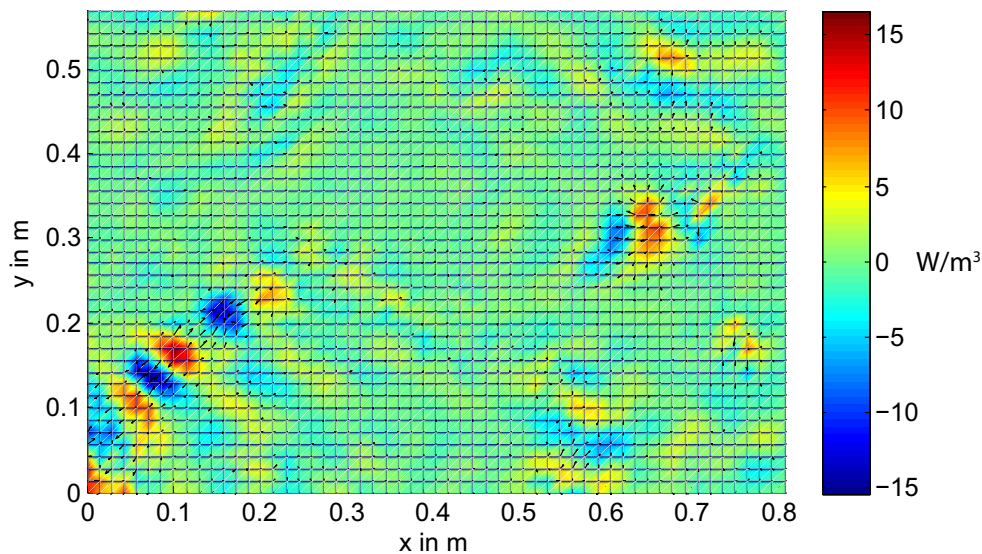


Abbildung 9.3: Experimentell bestimmter in-plane-Anteil der STI der achten in-plane-Mode

bei der anschließenden Berechnung der STI führt dies jedoch zu größeren Abweichungen.

Bei der Untersuchung der Schwingungen realer Bauteile (z. B. Untersuchungen des Schwingungszustandes im Betrieb) mit dem 3D-Scanning-Laservibrometer ist bei der Bestimmung der STI in Plattenebene mit den gleichen Problemen zu rechnen. Bei realen Bauteilen werden die Schwinggeschwindigkeiten in Plattenebene meist durch Transversalschwingungen überlagert, was die fehlerfreie Bestimmung der STI in Plattenebene erschwert.

In weiteren Grundlagenuntersuchungen muss daher analog zu Abschnitt 5.1 der Messfehler für die Messung der in-plane-Geschwindigkeiten bestimmt werden. In einer zu planenden Messreihe muss auf die Anregung des Systems besonders geachtet werden. Der sehr gute Ansatz mit zwei Piezopatches muss verfeinert werden, so dass die Anregung von Biegewellen in der Struktur minimiert wird. Des Weiteren muss auf eine exakte Aussteuerung des Messsystems geachtet werden. In weiteren Schritten sollte der Anteil an Transversalschwingungen schrittweise erhöht werden, um die Grenzen des Messverfahrens für die Berechnung der in-plane-Anteile der STI aufzuzeigen. Da ein FE-Modell des Prüfstandes vorhanden ist, kann ein Abgleich zwischen numerischen und experimentellen Simulationen vorgenommen werden. Falls möglich können auch alternative Messverfahren, wie z. B. die Image Pattern Correlation Technique (IPCT), zur Bestimmung der Oberflächengeschwindigkeiten angewendet werden. Durch Korrelation zufälliger Punktmuster auf der Oberfläche der Struktur und Aufzeichnung mit zwei Kameras kann mit diesem Messverfahren das dreidimensionale Vektorfeld der Geschwindigkeiten rekonstruiert werden.

(Die in diesem Abschnitt verwendeten FE-Modelle wurden von Oliver Heuss (Fraunhofer LBF) zur Verfügung gestellt, die 3D-Messdaten wurden im Rahmen der Diplomarbeit von Marc Nichols erfasst.)

9.3 Bestehender Forschungsbedarf

Aus den durchgeführten Arbeiten ergeben sich Anknüpfungspunkte für weitere Untersuchungen, die sich den in Abschnitt 1.2 formulierten Zielsetzungen zuteilen lassen.

1. Modellbildung und Berechnung der STI

Eine exaktere Berechnung der Transversalschwingungen mit dem analytischen Plattenmodell ist möglich, wenn die Schubspannungen im Modell berücksichtigt werden. Dazu kann an Stelle des KIRCHHOFFSchen Plattenmodells das Modell von MINDLIN verwendet werden. Darüber hinaus haben aktuelle Untersuchungen gezeigt, dass die Longitudinalwellen vor allem bei hohen Frequenzen einen nicht zu vernachlässigenden Anteil am Gesamtenergiefluss haben [25]. Es gibt zahlreiche Veröffentlichungen zur analytischen Beschreibung von Longitudinalschwingungen, beispielsweise von BARDELL [3], FARAG [14] oder LIU [34]. Die Berücksichtigung von Longitudinalschwingungen im analytischen Modell kann analog zu den Modellen in diesen Veröffentlichungen erfolgen. Eine Alternative zur analytischen Betrachtung ist die Modellierung des Systems mit finiten Elementen. Dies hat den Vorteil, dass auch komplexe Geometrien untersucht werden können.

2. Vergleich verschiedener Verfahren zur Berechnung der STI

Der Frequenzbereich, in dem die STI berechnet wurde, war für diese Arbeit auf 500 Hz beschränkt, da zum einen aktive Systeme in diesem Frequenzbereich angewendet werden und zum anderen bei höheren Frequenzen die Diskretisierung der Platte erheblich verfeinert werden muss, um den STI-Verlauf korrekt zu berechnen und die feinen Wirbelstrukturen aufzulösen. Eine deutliche Erhöhung der Stützstellenzahl hat aber sowohl längere Rechenzeiten als auch längere Messzeiten zur Folge. Dennoch sollte im Zuge einer weiteren Verallgemeinerung der Ergebnisse der untersuchte Frequenzbereich mit fortschreitender Rechnerleistung ausgedehnt werden.

3. Untersuchung der Auswirkung von Messfehlern auf die Berechnung der STI

Die Auswirkung von Messfehlern auf die STI und die Auswirkung der Anwendung eines Mittelungsverfahrens wurden für den bestehenden Aufbau untersucht. Zudem wurde mittels Monte-Carlo-Simulation der Einfluss des Seitenverhältnisses der ebenen Rechteckplatte und der Einfluss der Lage des Anregungsortes auf die Frequenz, bis zu der die Mittelung sinnvoll ist, bestimmt. Um die Ergebnisse weiter zu verallgemeinern, muss die Monte-Carlo-Simulation mit einem Modell durchgeführt werden, das zum einen die Berechnung komplexer Strukturen (gekrümmte Platten, variierende Dicke, ...) und zum anderen die Berücksichtigung von Longitudinalwellen erlaubt. Hierfür bietet sich die Erstellung eines parametrisierten FE-Modells an.

4. Bestimmung relevanter Einflussfaktoren auf die Leistungsberechnung

Für weitere Untersuchungen zur Bestimmung von Einflussfaktoren sollte, wie im vorherigen Abschnitt beschrieben, auf ein FE-Modell zurückgegriffen werden, was die Simulation komplexerer Geometrien ermöglicht. So könnte auch für komplexe Modelle der Einfluss der Diskretisierung der Struktur und des Abstandes der Integrationsgrenzen von der Quelle auf die Leistungsberechnung mittels STI untersucht werden.

5. Regelung mit STI als Regelgröße

Für das geregelte System wurde ein adaptives fx -LMS-Filter verwendet. Dieses Filter funktioniert sehr gut bei harmonischen oder periodischen Störgrößen, bei stochastischer Anregung ist es jedoch nicht einsetzbar. Verwendet man beispielsweise einen Optimalregler anstelle des adaptiven Filters, so ist es möglich, auch bei rauschartigen Störgrößen eine Reduktion der Amplituden zu erreichen. Für Versuche am Prüfstand muss zusätzlich ein Beobachter ausgelegt werden, der basierend auf den Daten einer Modalanalyse erstellt werden kann. Des Weiteren sollte die Anwendbarkeit des verwendeten Regelungskonzeptes anhand eines industrienahen Beispiels gezeigt werden.

A Anhang

A.1 Eigenfrequenzen der Platte

Tabelle A.1: Eigenfrequenzen und Modennummern der Platte (850 mm × 550 mm × 1,5 mm, Stahl:
 $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$, $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$, $\nu = 0,3$)

gelenkige Lagerung				feste Einspannung			
	Frequenz	m	n		Frequenz	m	n
1	17,5	1	1	1	31,3	1	1
2	33,0	2	1	2	50,0	2	1
3	54,4	1	2	3	76,0	1	2
4	58,7	3	1	4	79,1	3	1
5	69,9	2	2	5	94,8	2	2
6	94,9	4	1	6	118,4	4	1
7	95,7	3	2	7	123,8	3	2
8	116,0	1	3	8	145,4	1	3
9	131,5	2	3	9	163,2	4	2
10	131,8	4	2	10	164,2	2	3
11	141,3	5	1	11	168,1	5	1
12	157,3	3	3	12	193,2	3	3
13	178,2	5	2	13	212,9	5	2
14	193,4	4	3	14	228,1	6	1
15	198,0	6	1	15	232,6	4	3
16	202,3	1	4	16	239,4	1	4
17	217,8	2	4	17	258,2	2	4
18	235,0	6	2	18	272,9	6	2
19	239,8	5	3	19	282,3	5	3
20	243,5	3	4	20	287,2	3	4
21	265,1	7	1	21	298,4	7	1
22	279,6	4	4	22	326,6	4	4
23	296,6	6	3	23	342,3	6	3
24	302,0	7	2	24	343,2	7	2
25	313,2	1	5	25	358,1	1	5
26	326,1	5	4	26	376,3	5	4
27	328,6	2	5	27	376,9	2	5
28	342,4	8	1	28	379,1	8	1
29	354,4	3	5	29	405,9	3	5
30	363,6	7	3	30	412,6	7	3
31	379,4	8	2	31	423,8	8	2
32	382,8	6	4	32	436,3	6	4
33	390,5	4	5	33	445,3	4	5
34	430,1	9	1	34	470,0	9	1
35	437,0	5	5	35	493,2	8	3
36	441,0	8	3	36	495,0	5	5
37	448,7	1	6	37	501,4	1	6
38	449,9	7	4	38	506,6	7	4
39	464,1	2	6	39	514,8	9	2
40	467,1	9	2	40	520,2	2	6
41	489,9	3	6	41	549,2	3	6
42	493,7	6	5	42	555,0	6	5

A.2 Zustandsraumdarstellung des Plattenmodells

Da Simulink nur in der Zustandsraumdarstellung rechnet, werden alle verwendeten Transferfunktionen $G(s)$ in die Zustandsraumdarstellung umgerechnet, was längere Rechenzeiten zur Folge hat. Um eine effektive Berechnung der Verschiebung in Matlab/Simulink zu ermöglichen, wird die Bewegungsgleichung der Platte vorab in die Zustandsraumdarstellung überführt.

Die Bewegungsgleichung der Platte mit steifigkeitsproportionaler Dämpfung ξ , punktförmiger Kraftanregung $f(x, y, t)$ (Gleichung (2.8)) und Kraftwirkung des Piezopatch $p(x, y, t)$ (Gleichung (2.38)) kann geschrieben werden als

$$B\Delta\Delta\left(w(x, y, t) + 2\xi\frac{\partial w(x, y, t)}{\partial t}\right) + \rho h\frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} = f(x, y, t) - p(x, y, t). \quad (\text{A.1})$$

Setzt man den Ansatz

$$w(x, y, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \phi_{mn}(x, y)\eta(t) \quad (\text{A.2})$$

mit der zeitabhängigen Verschiebungsgröße $\eta(t)$ in Gleichung (A.1) ein, integriert über die Plattenfläche und multipliziert mit den Eigenfunktionen Φ_{mn} (siehe auch [33]), führt dies auf die Gleichung

$$\ddot{\eta}(t) + 2\xi\omega_{mn}\dot{\eta} + \omega_{mn}^2\eta = \frac{1}{M}(\hat{F}\phi_{mn}(x^*, y^*) - P_{mn}). \quad (\text{A.3})$$

Mit Hilfe des Zustandsvektors

$$Q(t) = \begin{pmatrix} \eta(t) \\ \dot{\eta}(t) \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

kann Gleichung (A.3) in die Zustandsraumdarstellung überführt werden:

$$\dot{Q}(t) = \mathbf{A}Q(t) + \mathbf{B}_p U(t) + \mathbf{B}_f f(t), \quad (\text{A.5})$$

$$w(x, y, t) = \mathbf{C}Q(t). \quad (\text{A.6})$$

Die Matrix \mathbf{A} wird als Systemmatrix bezeichnet, \mathbf{B}_p als Eingangsmatrix des Piezopatches, \mathbf{B}_f als Eingangsmatrix der Kraft und \mathbf{C} als Ausgangsmatrix. Dieses System hat keine Durchgangsmatrix \mathbf{D} , da der Eingang nicht direkt auf die Ausgangsgröße wirken kann. Ausgeschrieben lauten die Matrizen \mathbf{A} , \mathbf{B}_f , \mathbf{B}_p und \mathbf{C}

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ [-\omega_{mn}^2] & [-2\xi_{mn}\omega_{mn}] \end{bmatrix}, \quad (\text{A.7})$$

$$\mathbf{B}_f = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \phi_{11}(x^*, y^*) \\ \vdots \\ \phi_{mn}(x^*, y^*) \end{bmatrix}, \quad (\text{A.8})$$

$$\mathbf{B}_p = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ P_{11} \\ \vdots \\ P_{mn} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.9})$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \phi_{11}(x_1, y_1) & \cdots & \phi_{mn}(x_1, y_1) & 0 & \cdots & 0 \\ & \vdots & & & \vdots & \\ \phi_{11}(x_l, y_l) & \cdots & \phi_{mn}(x_l, y_l) & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.10})$$

Umrechnung zwischen Zustandsraummodell und Übertragungsfunktion

Für manche Matlab-Modelle wird an Stelle der Zustandsraumdarstellung die Übertragungsfunktion des Plattenmodells verwendet. Nach Gleichung (A.5) ist die Eingangsmatrix \mathbf{B} definiert als $\mathbf{B} = \mathbf{B}_f + \mathbf{B}_p$, und der Vektor der Eingangsgrößen kann geschrieben werden als $V(t) = [U(t), f(t)]'$. Nach PREUMONT [56] ergibt sich für die Zustandsraumdarstellung

$$\dot{Q} = \mathbf{A}Q + \mathbf{B}V. \quad (\text{A.11})$$

Unter Verwendung der Laplace-Transformation kann Gleichung (A.11) auch ausgedrückt werden als

$$sQ(s) - q(0) = \mathbf{A}Q(s) + \mathbf{B}V(s). \quad (\text{A.12})$$

Auflösen der Gleichung (A.12) nach $Q(s)$ mit der Anfangsbedingung $q(0) = 0$ führt zu

$$Q(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}V(s). \quad (\text{A.13})$$

$Q(s)$ wird schließlich in die Gleichung der Ausgangsgrößen (A.6) eingesetzt, und es ergibt sich

$$Y(s) = \underbrace{[C(sI - A)^{-1}B]}_{G(s)} V(s) . \quad (\text{A.14})$$

Für SISO-Systeme (Single Input Single Output, Eingrößensysteme) ist $G(s)$ eine Transferfunktion, für MIMO-Systeme (Multiple Input Multiple Output, Mehrgrößensysteme) ist $G(s)$ eine Transfermatrix.

A.3 Auswirkung gestreuter Verschiebungswerte auf die Berechnung der STI in der Simulation

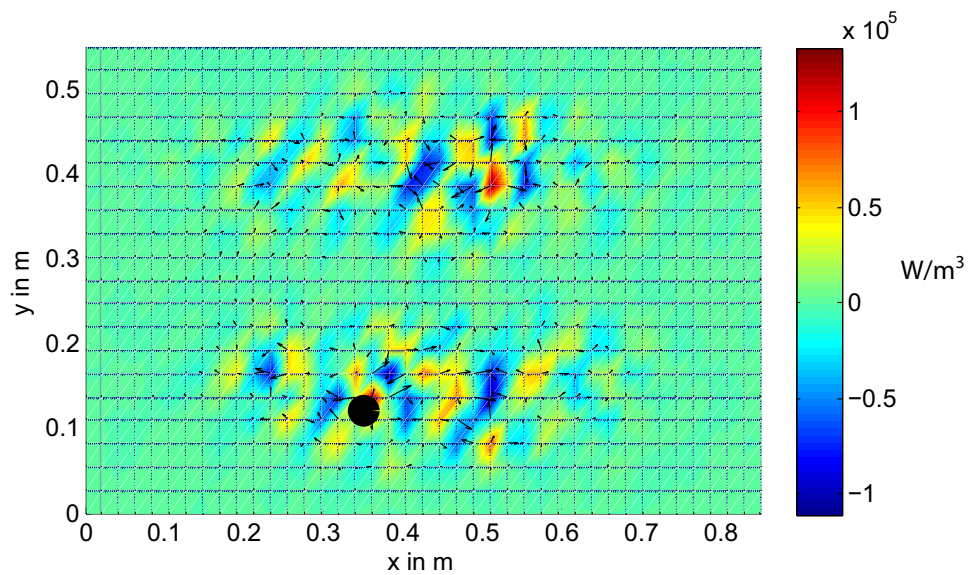


Abbildung A.1: Simulierter STI-Verlauf mit fehlerbehafteten Eingangsgrößen bei 76 Hz (1-2-Mode)

Wie in Abbildung A.1 zu sehen ist, weist der aus berechneten Verschiebungen mit definierter Streuung bestimmte STI-Verlauf Abweichungen auf, die mit den Abweichungen der aus gemessenen Größen berechneten STI (vgl. Abbildung 5.2) vergleichbar sind. Darüber hinaus kann auch das Verhalten bei höheren Frequenzen, d. h. bei einer großen Anzahl an Phasengradienten in der numerischen Simulation reproduziert werden, was in Abbildung A.2 für die 4-3-Mode verdeutlicht wird.

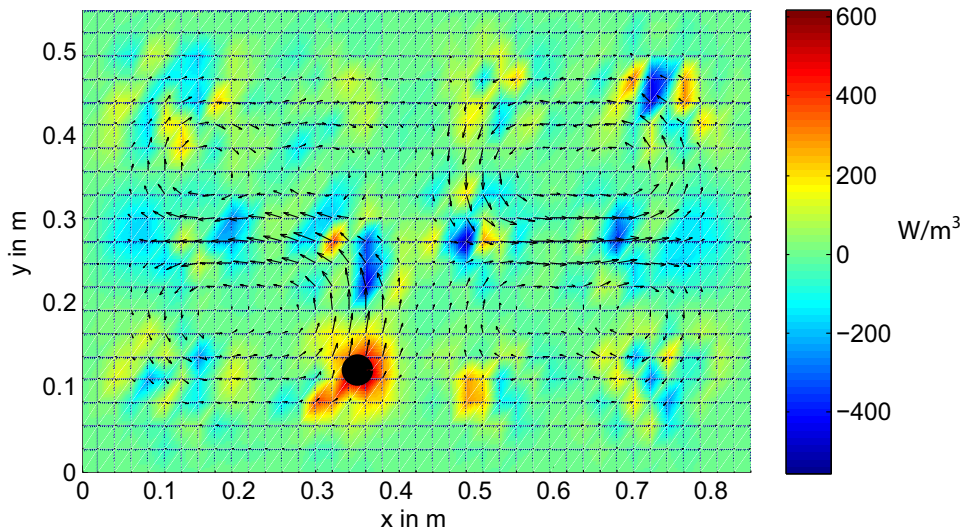


Abbildung A.2: Simulierter STI-Verlauf mit fehlerbehafteten Eingangsgrößen bei 231 Hz (4-3-Mode)

Die Abbildung A.2 zeigt, dass auch bei bewusst eingebrachter Streuung der STI-Verlauf bei höheren Moden aufgrund der hohen Anzahl an Phasengradienten sehr gut abgebildet wird. Zum Vergleich ist in Abbildung A.3 der STI-Verlauf der 4-3-Mode ohne künstlich eingebrachte Streuung zu sehen. Ein Vergleich der beiden Abbildungen macht deutlich, dass diese nahezu identisch sind. Nur an der Divergenz der STI, die als farbiger Hintergrund dargestellt ist, kann man minimale Unterschiede erkennen. Durch die eingebrachte Streuung entstehen vereinzelt Schein-Quellen und Schein-Senken auf der Struktur, die in Abbildung A.2 hervorstechen und für die höheren Maximal- und Minimalwerte in der Divergenz verantwortlich sind, die aber in Abbildung A.3 nicht zu finden sind.

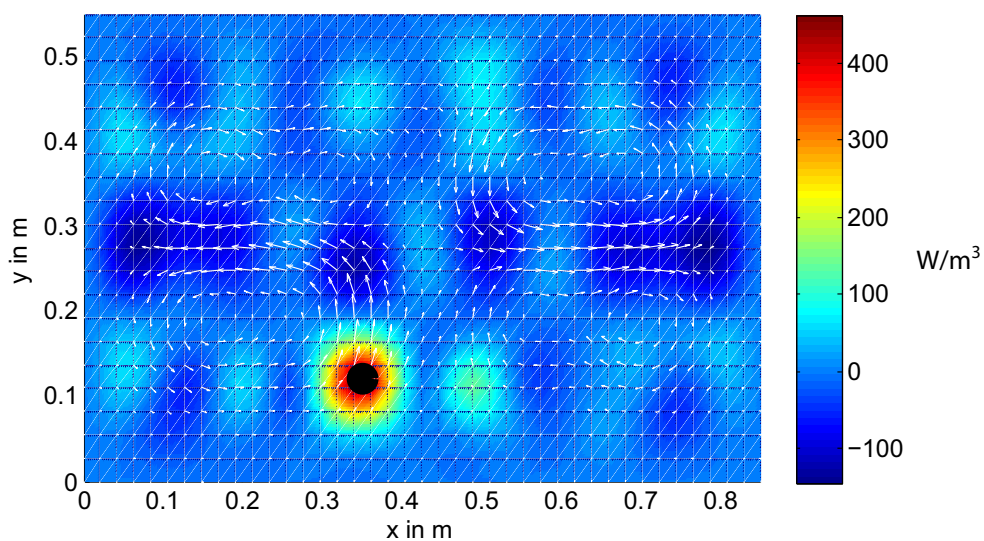


Abbildung A.3: Simulierter STI-Verlauf bei 231 Hz (4-3-Mode)

A.4 Weitere Abbildungen zu Kapitel 5.2.2 und Kapitel 5.2.3

Abbildung A.4 zeigt die Standardabweichung der Fehler $\epsilon_{\text{Betrag, gestreut}}$ und $\epsilon_{\text{Betrag, gemittelt}}$. Diese sind von derselben Größenordnung wie die jeweiligen Mittelwerte, die in Abbildung 5.6 gezeigt werden. Demnach ist die Variation des Fehlers des Betrages der STI auf der Struktur groß.

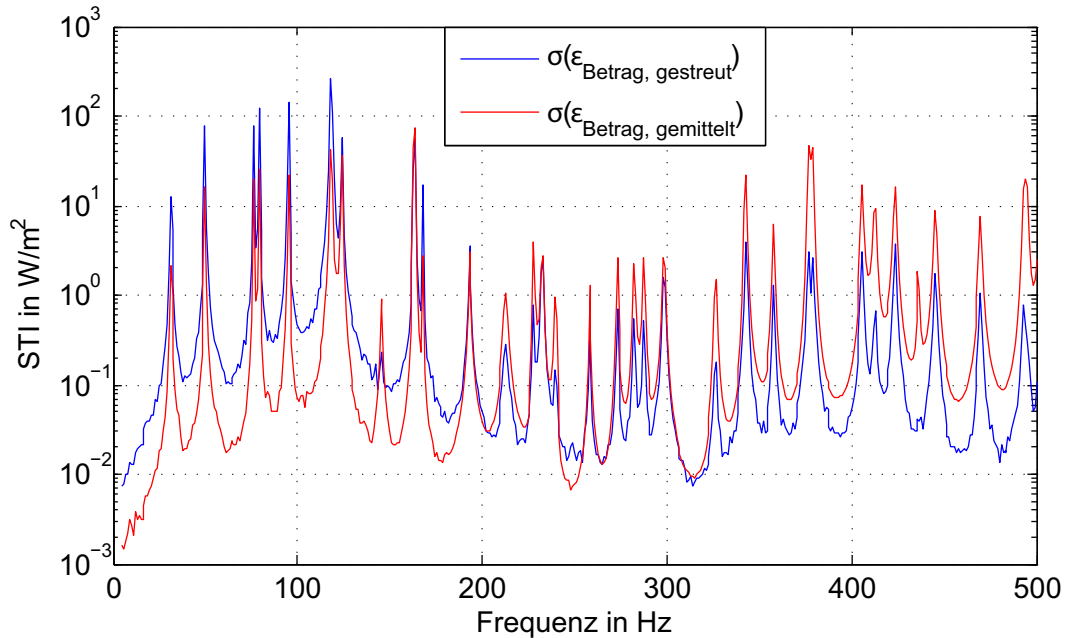


Abbildung A.4: Standardabweichung der Fehler $\epsilon_{\text{Betrag, gestreut}}$ und $\epsilon_{\text{Betrag, gemittelt}}$ der Realteile der STI

Steigt die Streuung des Betrages der Verschiebungen auf der Struktur, hat dies nur geringe Auswirkungen auf die STI-Berechnung. Abbildung A.5 verdeutlicht zudem, dass die Fehler durch Anwendung des Mittelungsverfahrens für eine steigende Standardabweichung des Betrages der Verschiebungen immer größer sind, verglichen mit der Berechnung der STI aus gestreuten Daten. Die Phase der Verschiebungen wird in diesem Fall nicht manipuliert.

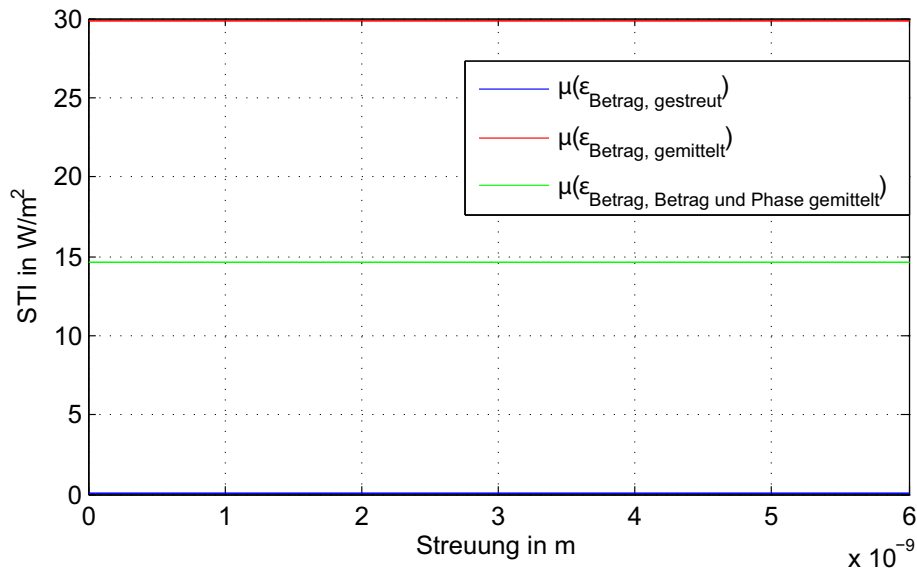


Abbildung A.5: Mittlere Fehler $\epsilon_{\text{Betrag, gestreut}}$, $\epsilon_{\text{Betrag, gemittelt}}$ und $\epsilon_{\text{Betrag, Betrag und Winkel gemittelt}}$ der Realteile der STI in Abhängigkeit von der Streuung des Betrages der Verschiebung

Bei größer werdender Streuung des Phasenwinkels der Verschiebung nimmt auch die Standardabweichung der Fehler $\epsilon_{\text{Betrag, gestreut}}$, $\epsilon_{\text{Betrag, gemittelt}}$ und $\epsilon_{\text{Betrag, Betrag und Winkel gemittelt}}$ deutlich zu (Abbildung A.6). Analog zum Verlauf des Mittelwertes des Fehles $\epsilon_{\text{Betrag, gemittelt}}$, der in Abbildung 5.11 gezeigt wird, ist auch die Streuung dieses Fehlers am geringsten.

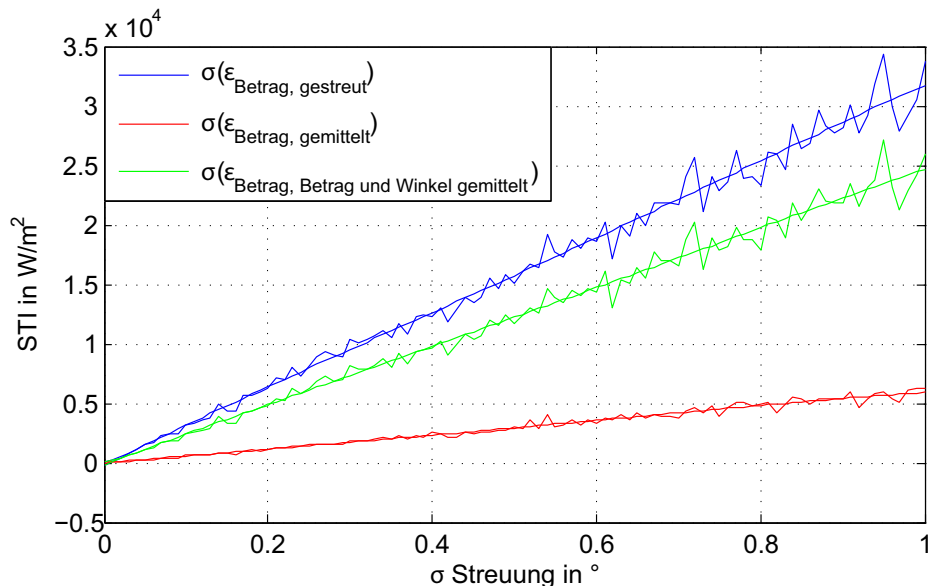


Abbildung A.6: Standardabweichung der Fehler $\epsilon_{\text{Betrag, gestreut}}$, $\epsilon_{\text{Betrag, gemittelt}}$ und $\epsilon_{\text{Betrag, Betrag und Winkel gemittelt}}$ der Realteile der STI in Abhängigkeit von der Streuung des Phasenwinkels der Verschiebung

Auch die Standardabweichung des Winkelfehlers der STI (Abbildung A.7) ist für die STI-Berechnung aus gemittelten Daten am geringsten. Die Standardabweichung des Fehlers $\epsilon_{\text{Winkel, gemittelt}}$ ist für Streuungen des Phasenwinkels von mehr als $0,2^\circ$ kleiner als für die beiden anderen Fehlergrößen.

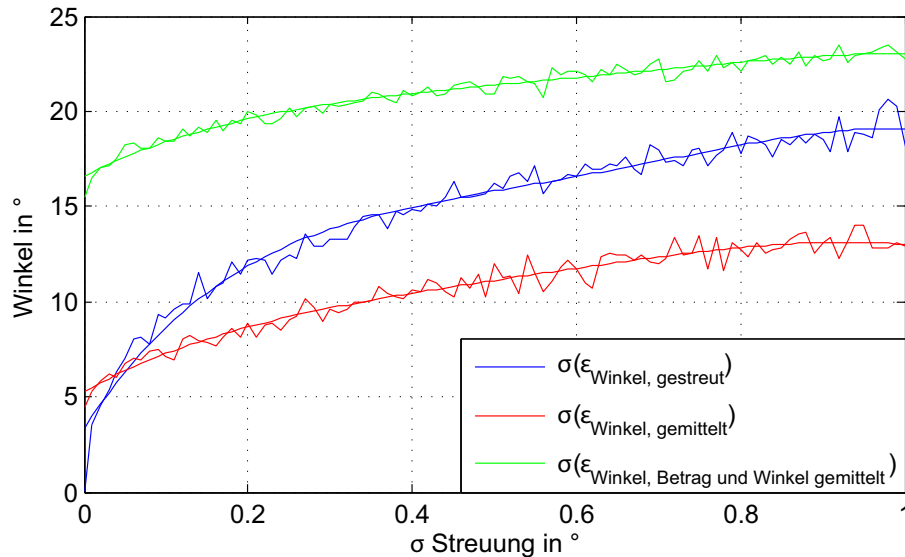


Abbildung A.7: Standardabweichung der Fehler $\epsilon_{\text{Winkel, gestreut}}$, $\epsilon_{\text{Winkel, gemittelt}}$ und $\epsilon_{\text{Winkel, Betrag und Winkel gemittelt}}$ der Realteile der STI in Abhängigkeit von der Streuung des Phasenwinkels der Verschiebung

Wird der Imaginärteil der STI betrachtet, so ist eine Mittelung der Verschiebungen oder der STI-Vektoren nicht sinnvoll. Selbst für große Streuungen des Phasenwinkels der Verschiebung ist der Fehler $\epsilon_{\text{Betrag, gestreut}}$ immer geringer als die Fehler $\epsilon_{\text{Betrag, gemittelt}}$ und $\epsilon_{\text{Betrag, Betrag und Winkel gemittelt}}$ (Abbildung A.8).

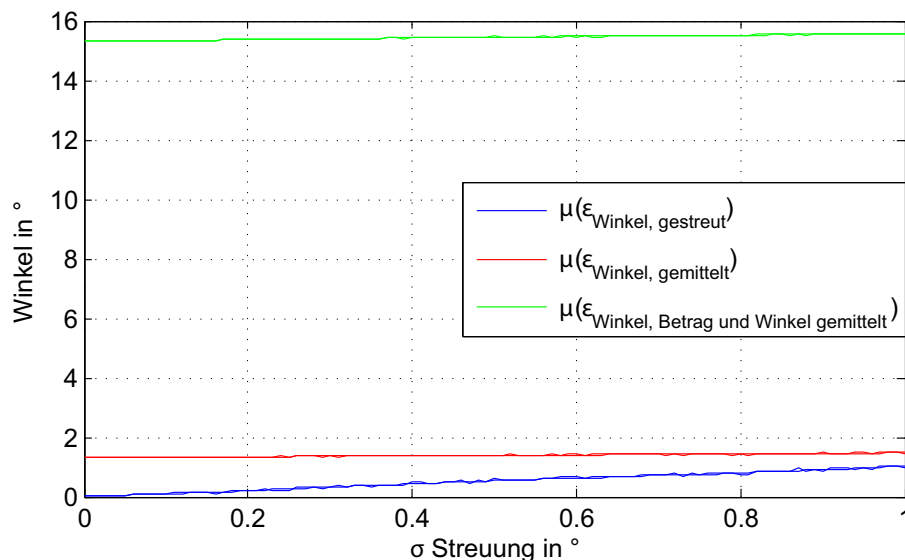


Abbildung A.8: Mittlere Fehler $\epsilon_{\text{Betrag, gestreut}}$, $\epsilon_{\text{Betrag, gemittelt}}$ und $\epsilon_{\text{Betrag, Betrag und Winkel gemittelt}}$ der Imaginärteile der STI in Abhängigkeit von der Streuung des Phasenwinkels der Verschiebung

A.5 Analytische Berechnung des STI-Integrals

Verwendet man ein rechteckiges Kontrollvolumen um eine Quelle oder Senke und berechnet die Linienintegrale aus den Gleichungen der analytischen Lösung der STI in x - und y -Richtung (Gleichungen (4.2), (4.3)), ergibt sich für das Integral in y -Richtung

$$\begin{aligned}
 \int_{y_1}^{y_2} I_x \, dy = & \frac{i\omega B}{2h} \left(- \sum_{m,n} C_{m,n} C_{m,n}^* \alpha_m^3 \sin(\alpha_m x) \cos(\alpha_m x) \left[\frac{1}{2}y - \frac{1}{4\beta_n} \sin(2\beta_n y) \right]_{y_1}^{y_2} \right. \\
 & - \mu \sum_{m,n} C_{m,n} C_{m,n}^* \alpha_m \beta_n^2 \sin(\alpha_m x) \cos(\alpha_m x) \left[\frac{1}{2}y - \frac{1}{4\beta_n} \sin(2\beta_n y) \right]_{y_1}^{y_2} \\
 & + (1 - \mu) \sum_{m,n} C_{m,n} C_{m,n}^* \alpha_m \beta_n^2 \sin(\alpha_m x) \cos(\alpha_m x) \left[\frac{1}{2}y + \frac{1}{4\beta_n} \sin(2\beta_n y) \right]_{y_1}^{y_2} \\
 & + \sum_{m,n} C_{m,n} C_{m,n}^* \alpha_m^3 \sin(\alpha_m x) \cos(\alpha_m x) \left[\frac{1}{2}y - \frac{1}{4\beta_n} \sin(2\beta_n y) \right]_{y_1}^{y_2} \\
 & \left. + \sum_{m,n} C_{m,n} C_{m,n}^* \alpha_m \beta_n^2 \sin(\alpha_m x) \cos(\alpha_m x) \left[\frac{1}{2}y - \frac{1}{4\beta_n} \sin(2\beta_n y) \right]_{y_1}^{y_2} \right) \quad (A.15)
 \end{aligned}$$

und für das Integral in x -Richtung

$$\begin{aligned}
 \int_{x_1}^{x_2} I_y \, dx = & \frac{i\omega B}{2h} \left(- \sum_{m,n} C_{m,n} C_{m,n}^* \beta_n^3 \sin(\beta_n y) \cos(\beta_n y) \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4\alpha_m} \sin(2\alpha_m x) \right]_{x_1}^{x_2} \right. \\
 & - \mu \sum_{m,n} C_{m,n} C_{m,n}^* \alpha_m^2 \beta_n \sin(\beta_n y) \cos(\beta_n y) \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4\alpha_m} \sin(2\alpha_m x) \right]_{x_1}^{x_2} \\
 & + (1 - \mu) \sum_{m,n} C_{m,n} C_{m,n}^* \alpha_m^2 \beta_n \cos(\beta_n y) \sin(\beta_n y) \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4\alpha_m} \sin(2\alpha_m x) \right]_{x_1}^{x_2} \\
 & + \sum_{m,n} C_{m,n} C_{m,n}^* \alpha_m^2 \beta_n \sin^2(\beta_n y) \left[\frac{1}{2\alpha_m} \sin^2(\alpha_m x) \right]_{x_1}^{x_2} \\
 & \left. + \sum_{m,n} C_{m,n} C_{m,n}^* \beta_n^3 \sin^2(\beta_n y) \left[\frac{1}{2\alpha_m} \sin^2(\alpha_m x) \right]_{x_1}^{x_2} \right) . \quad (A.16)
 \end{aligned}$$

Durch Summation der Beiträge der vier Ränder ergibt sich mit den Gleichungen (A.15) und (A.16) die Lösung für das Integral mit den Abständen x_1, x_2 und y_1, y_2 vom Mittelpunkt des Integrationsgebietes zu

$$P_{\text{STI Integral}} = - \int_{y_1}^{y_2} I_x \, dy \Big|_{x_1} + \int_{y_1}^{y_2} I_x \, dy \Big|_{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} I_y \, dx \Big|_{y_1} + \int_{x_1}^{x_2} I_y \, dx \Big|_{y_2} . \quad (A.17)$$

Der senkrechte Strich $|_{x_1}$ bedeutet eine Integration an der angegebenen Stelle, in diesem Beispiel an der x -Koordinate x_1 . Die Implementierung und Berechnung dieser Integrale in Matlab ist jedoch aufgrund der Komplexität wenig praktikabel. Eine einfachere Lösung ergibt sich in diesem Fall durch die Verwendung der Lagrange-Funktion.

A.6 Berechnungsmethoden der Sensitivitätsanalyse

Mit Hilfe der Sensitivitätsanalyse können die Einflüsse von Parametern auf das Systemverhalten untersucht werden. Demnach werden die Parameter identifiziert, auf die das System besonders sensibel reagiert. Durch Betrachtung der Sensitivitätswerte können darüber hinaus Zusammenhänge zwischen Parametern dargestellt werden.

Im folgenden Abschnitt werden zuerst die Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung erläutert, die für die Bestimmung der Sensitivitätsmaße erforderlich sind. Im Weiteren wird auf die Bestimmung der Sensitivitätsmaße sowie auf die Grundlagen der Monte-Carlo-Simulation eingegangen. Weitere Details, insbesondere zu den theoretischen und methodischen Grundlagen der Sensitivitätsanalyse, sind in der Dissertation von HAN [24] ausführlich dargestellt.

Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Mit Hilfe der Verteilungsfunktion $P(a)$ der Amplituden a wird die Wahrscheinlichkeit \mathbb{W} angegeben, mit der die Funktion $x(t)$ kleiner oder gleich einem gegebenen Wert a ist.

$$P(a) = \mathbb{W}\{x \leq a\} . \quad (\text{A.18})$$

Um die Verteilungsfunktion $P(a)$ zu berechnen, wird ein Ausschnitt aus der Funktion $x(t)$ der Dauer T betrachtet. Aus den Zeitabschnitten $\Delta t_k(a)$, in denen die Funktion $x(t)$ kleiner a ist, kann die Verteilungsfunktion geschätzt werden

$$P(a) \approx \frac{\sum \Delta t_k(a)}{T} . \quad (\text{A.19})$$

Die Verteilungsfunktion kann nur Werte zwischen 0 ($P(-\infty)$) und 1 ($P(\infty)$) annehmen. Die Ableitung der Verteilungsfunktion $P(a)$ wird als Verteilungsdichte $p(a)$ bezeichnet

$$p(a) = \frac{dP(a)}{da} . \quad (\text{A.20})$$

Demnach gilt für die Verteilungsfunktion

$$P(a) = \int_{-\infty}^a p(x) dx . \quad (\text{A.21})$$

Die Verteilungsdichte $p(a)$ ist immer positiv und gibt die relative Wahrscheinlichkeit an, mit der die Funktion $x(t)$ gleich a ist.

Um den Einfluss zufälliger Störungen auf das Ergebnis einer Analyse zu reduzieren, werden Versuche mehrmals durchgeführt und gemittelt. Die Gesamtheit dieser Einzelversuche (Realisierung) nennt man Ensemble. Mit Hilfe der Verteilungsdichte $p(x)$ und einer beliebigen Funktion $f(x)$ der Zufallsvariablen x kann nun der Erwartungswert \mathbb{E} definiert werden

$$\mathbb{E}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)f(x) dx \approx \sum_i p(x_i)f(x_i). \quad (\text{A.22})$$

Für eine ausreichend große Anzahl an Mittelungen stimmt der Erwartungswert E der Funktion $f(x)$ mit dem arithmetischen Mittelwert der Stichprobe (Moment 1. Ordnung) überein

$$m_1 = \lim_{X \rightarrow \infty} \int_{-X}^X f(x) dx \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i). \quad (\text{A.23})$$

Die Varianz σ^2 (\mathbb{V}) wird mit dem zentralen quadratischen Mittelwert beschrieben

$$\sigma^2(x) = \mathbb{E}\{[f(x) - m_1(x)]^2\} = \lim_{X \rightarrow \infty} \frac{1}{2X} \int_{-X}^X [f(x) - m_1(x)]^2 dx = m_2(x) - m_1(x)^2 \quad (\text{A.24})$$

mit

$$m_2(x) = \lim_{X \rightarrow \infty} \int_{-X}^X f(x)^2 dx \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)^2. \quad (\text{A.25})$$

Mathematische Methoden der Sensitivitätsanalyse

In der Statistik wird eine Variable mit einem Großbuchstaben, z. B. X , und deren Wert mit einem kleinen Buchstaben, z.B. x , bezeichnet. Die bedingte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{W}(Y|X)$ gibt die Wahrscheinlichkeit von Y an, unter der Voraussetzung, dass X eingetreten ist.

Die Funktion $Y = f(x)$ kann in eine Summe aus einzelnen Faktoren zerlegt werden. Für eine Varianzanalyse wird die Funktion in einen konstanten Term f_0 , in Funktionen erster Ordnung $f(x_i)$ und Terme höherer Ordnung zerlegt

$$Y = f(x) = f_0 + \sum_i f_i(x_i) + \sum_i \sum_{i>j} f_{ij}(x_{ij}) + \dots + f_{12\dots k}(x_1, x_2, \dots, x_k). \quad (\text{A.26})$$

Der konstante Term ist der Erwartungswert der Funktion $f(x)$, die Terme erster Ordnung $f_i(x_i)$ heißen Haupteffekte, die Terme höherer Ordnung werden als Wechselwirkungseffekte bezeichnet.

Die totale Varianz $\mathbb{V}(Y)$ berechnet sich aus der Summe des Erwartungswertes \mathbb{E} , der Varianz \mathbb{V} und der Varianz des Erwartungswertes zu

$$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}_{X_i}(\mathbb{V}_{X \sim i}(Y|X_i)) + \mathbb{V}_{X_i}(\mathbb{E}_{X \sim i}(Y|X_i)). \quad (\text{A.27})$$

Der Ausdruck $\mathbb{E}_{X_i}(\mathbb{V}_{X \sim i}(Y|X_i))$ beschreibt den Mittelwert der Varianz bei festem Parameter X_i , der zweite Summand $\mathbb{V}_{X_i}(\mathbb{E}_{X \sim i}(Y|X_i))$ gibt die Varianz des Mittelwertes bei festem X_i an. Ein kleiner erster Summand in Gleichung (A.27) sowie ein großer zweiter Summand bedeuten einen großen Einfluss des Parameters X_i auf die Varianz der Ausgangsgröße Y .

Wird der zweite Summand aus Gleichung (A.27) durch $\mathbb{V}(Y)$ dividiert, ergibt sich der Sensitivitätswert erster Ordnung (Haupteffekt) zu

$$S_i = \frac{\mathbb{V}_{X_i}(\mathbb{E}_{X \sim i}(Y|X_i))}{\mathbb{V}(Y)} = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_{\text{tot}}^2} \times 100 \%. \quad (\text{A.28})$$

Der Sensitivitätswert erster Ordnung liegt zwischen 0 und 1 und beschreibt den Einfluss des Parameters X_i auf die Ausgangsgröße. Der Einfluss des Parameters X_i ist umso größer, je näher S_i am Wert 1 liegt. Es kann gezeigt werden, dass für nicht additive Modelle (es liegen Wechselwirkungen zwischen Parametern vor) die Summe der Sensitivitätswerte erster Ordnung kleiner eins ist [60]

$$\sum_{i=1}^k S_i < 1. \quad (\text{A.29})$$

Aus Gleichung (A.29) können Rückschlüsse auf die Linearität des Systems gezogen werden. Geht die Summe gegen 0, verhält sich das System nichtlinear, geht sie gegen 1, verhält es sich linear.

Mit den Sensitivitätswerten erster Ordnung können nur rein additive Modelle beschrieben werden. Mit Hilfe von Sensitivitätswerten höherer Ordnung können Interaktionen zwischen zwei oder mehreren Faktoren X_i beschrieben werden, die sich nicht aus der Superposition der Einzeleffekte ergeben. Für zwei Faktoren X_i und X_j ergibt sich beispielsweise für die Varianz der Erwartungswerte

$$\mathbb{V}_{X_i, X_j}(\mathbb{E}_{X_i, X_j}(Y|X_i, X_j)) = \mathbb{V}_i + \mathbb{V}_j + \mathbb{V}_{ij}. \quad (\text{A.30})$$

Durch Division der Gleichung (A.30) durch die Varianz der Antwort $V(Y)$ werden die Varianzen der Erwartungswerte durch die entsprechenden Sensitivitätswerte ausgedrückt und es entsteht

$$\frac{\mathbb{V}_{X_i, X_j}(\mathbb{E}_{X_i, X_j}(Y|X_i, X_j))}{\mathbb{V}(Y)} = S_i + S_j + S_{ij}. \quad (\text{A.31})$$

Mit Hilfe der Sensitivitätswerte höherer Ordnung können demnach auch nicht additive Modelle beschrieben werden. Durch eine Summierung aller Sensitivitätswerte kann ein Modell und damit die Varianz der Zielgröße Y vollständig beschrieben werden. Die Summe aller Sensitivitätswerte ergibt den Wert 1 [60].

$$\sum_i S_i + \sum_i \sum_{j>i} S_{ij} + \sum_i \sum_{j>i} \sum_{l>i} S_{ijl} + \dots + S_{123\dots k} = 1. \quad (\text{A.32})$$

Im Unterschied zum Haupteffekt beschreibt der Totaleffekt den Einfluss eines Parameters auf die Ausgangsvarianz unter Berücksichtigung der Wechselwirkungseffekte. Da die Summe aller Sensitivitätsterme gleich eins ist (A.32), berechnet sich der Totaleffekt des Parameters X_i durch Konstanthalten des Parameters $X_{\sim i}$ zu

$$S_{Ti} = 1 - \frac{\mathbb{V}(\mathbb{E}(Y|X_{\sim i}))}{\mathbb{V}(Y)}. \quad (\text{A.33})$$

Die Berücksichtigung der Wechselwirkungseffekte ist vor allem bei nichtlinearen Systemen relevant, da hier diese Effekte maßgeblich sein können.

Die Monte-Carlo-Simulation

Die Monte-Carlo-Simulation ist ein Verfahren zur Berechnung varianzbasierter Sensitivitätsmaße, beruhend auf einer zufälligen Stichprobenauswahl. Mit Hilfe eines Zufallszahlengenerators oder einer Zahlensequenz wird ein Parameterraum aufgespannt und mit diesem Parametersatz eine Simulation gestartet. Die benötigte Rechenzeit zur Erstellung der Zufallszahlen und zur abschließenden Berechnung der Sensitivitätsmaße ist meist gering im Vergleich zur Rechenzeit, die für die Simulationen benötigt wird. Dennoch beeinflusst die Auswahl der Zufallszahlen maßgeblich das Konvergenzverhalten der betrachteten Sensitivitätsmaße. Zur Berechnung von Sensitivitätsmaßen mittels Monte-Carlo-Simulation wird häufig ein Quasizufallszahlengenerator zur Berechnung von Sobol-Sequenzen [59] verwendet. Aus den Simulationsergebnissen können dann mit den oben vorgestellten Methoden die Sensitivitätswerte des Modells bestimmt werden. Die verwendeten numerischen Verfahren basieren auf Methoden und Algorithmen, die von SOBOL [67, 66], JANSEN [26] und SALTELLI [58, 59] veröffentlicht wurden. Die in dieser Arbeit durchgeführten Simulationen wurden in Matlab mit einem Programm, das im Rahmen einer Dissertation [24] am Fachgebiet SzM geschrieben wurde, durchgeführt.

A.7 Numerische und experimentelle Simulation des geregelten Systems mit Impulsanregung

Sowohl in der numerischen als auch in der experimentellen Simulation mit Impulsanregung wird die STI als Regelgröße verwendet und mit dem 2-Aufnahmeverfahren berechnet. Als Vergleichssystem dient der Regelkreis mit Beschleunigung als Regelgröße. Bei beiden Systemen kommt ein adaptiver Regler zum Einsatz. Der Aufbau der Regelkreise wird in Abschnitt 8.3 beschrieben.

Ergebnisse der numerischen Simulation

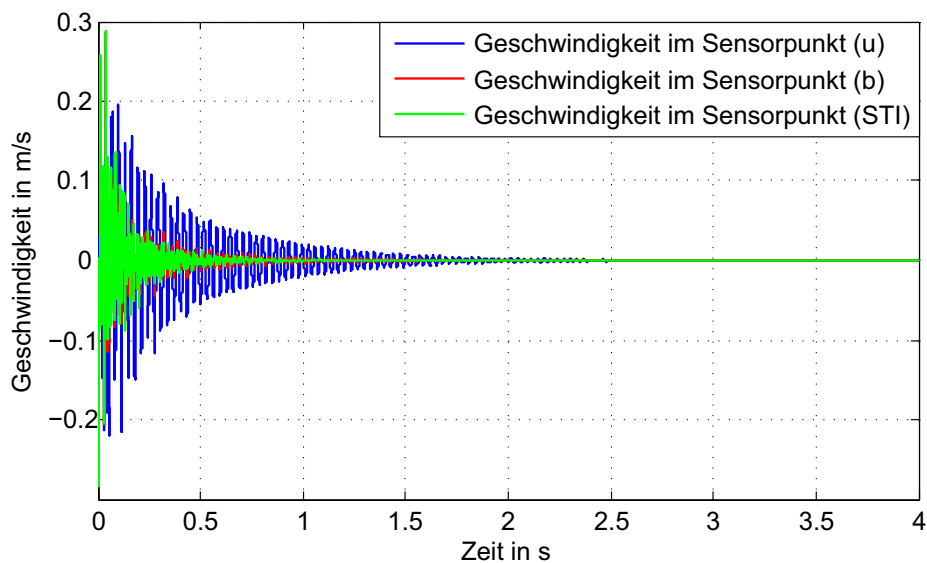


Abbildung A.9: Zeitverlauf der Schwinggeschwindigkeit der geregelten Systeme, ungeregeltes System (u) blau, Beschleunigungsregelung (b) rot, STI-Regelung (STI) grün

Das Systemverhalten im Zeitbereich (Abbildung A.9) zeigt, dass das System mit STI-Regelung im Vergleich zum System mit Beschleunigungsregelung eine etwas größere Dynamik besitzt und dass die durch den Impuls verursachten Schwingungen schneller reduziert werden können.

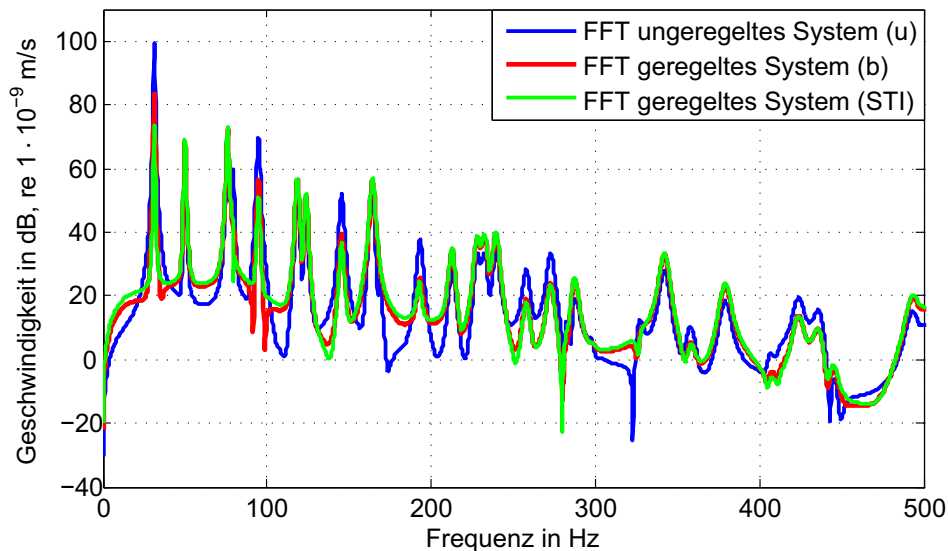


Abbildung A.10: Frequenzbereichsdarstellung der Schwinggeschwindigkeit der geregelten Systeme, ungeregeltes System (u) blau, Beschleunigungsregelung (b) rot, STI-Regelung (STI) grün

Das Spektrum in Abbildung A.10 ist über den Ausschwingvorgang, der in Abbildung A.9 gezeigt wird, gemittelt. Es ist deutlich zu erkennen, dass die Amplituden des Systems mit STI-Regelung (grün) in der Grundschiwingung (erste Eigenfrequenz) und in der vierte Eigenfrequenz wesentlich kleiner sind als die

Amplituden des Systems mit Beschleunigungsregelung. Bei allen anderen Frequenzen ist das Verhalten beider Systeme nahezu identisch.

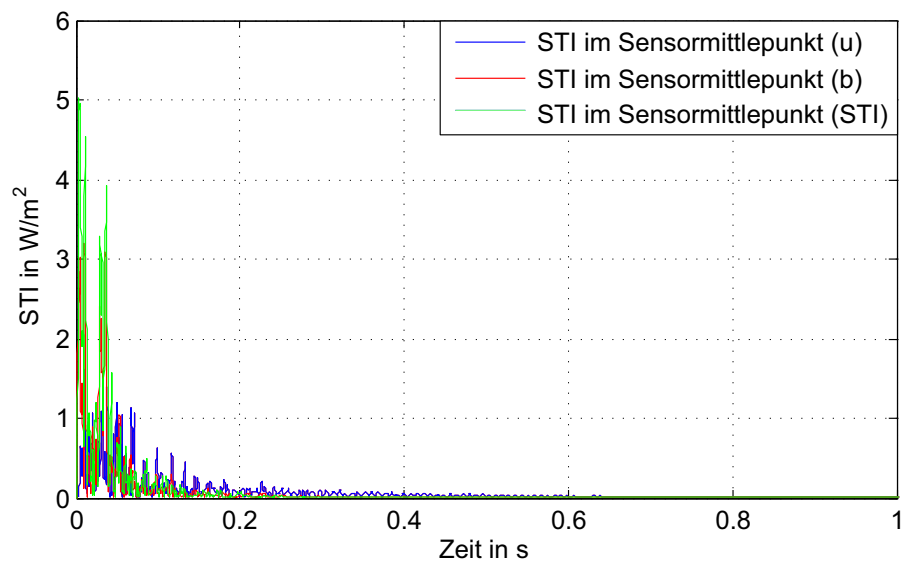


Abbildung A.11: Zeitbereichsdarstellung der STI im Sensorpunkt der geregelten Systeme, ungeregeltes System (u) blau, Beschleunigungsregelung (b) rot, STI-Regelung (STI) grün

Die Abbildung A.11 zeigt den Verlauf der STI der geregelten Systeme im Vergleich zum ungeregelten System im Zeitbereich. Sowohl mit STI-Regelung als auch mit Beschleunigungsregelung ist der Betrag der STI im Sensorpunkt nach dem Impuls größer als der Betrag der STI des ungeregelten Systems. Nach etwa 0,05 s gelingt es beiden Regelungen, den Betrag der STI im Sensorpunkt soweit zu reduzieren, dass der Betrag im weiteren Verlauf geringer ist als beim ungeregelten System. Im Vergleich zur Beschleunigungsregelung ist der Betrag der STI im Sensorpunkt bei der STI-Regelung zunächst größer. Die STI-Regelung reduziert durch den stärkeren Reglereingriff die Schwingungen allerdings auch schneller.

Ergebnisse der experimentellen Simulation

Die STI-Regelung und die Beschleunigungsregelung werden für die Prüfstandsmessungen mit Impulsanregung auf einem dSpace-System implementiert. Die Abbildungen A.12 und A.13 zeigen das Verhalten der geregelten Systeme im Zeitbereich. Keines der Systeme kann bei Impulsanregung die Beschleunigung erheblich reduzieren. Im Vergleich dazu konnten in der Simulation wesentlich bessere Ergebnisse erzielt werden (Abbildung A.9).

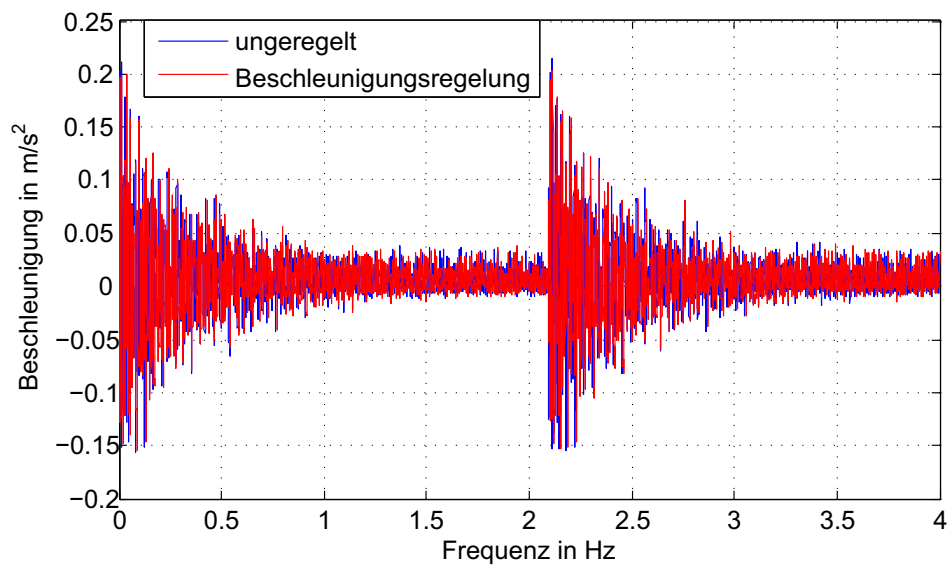


Abbildung A.12: Zeitverlauf der Beschleunigung des geregelten Systems mit Beschleunigungsregelung im Sensorpunkt

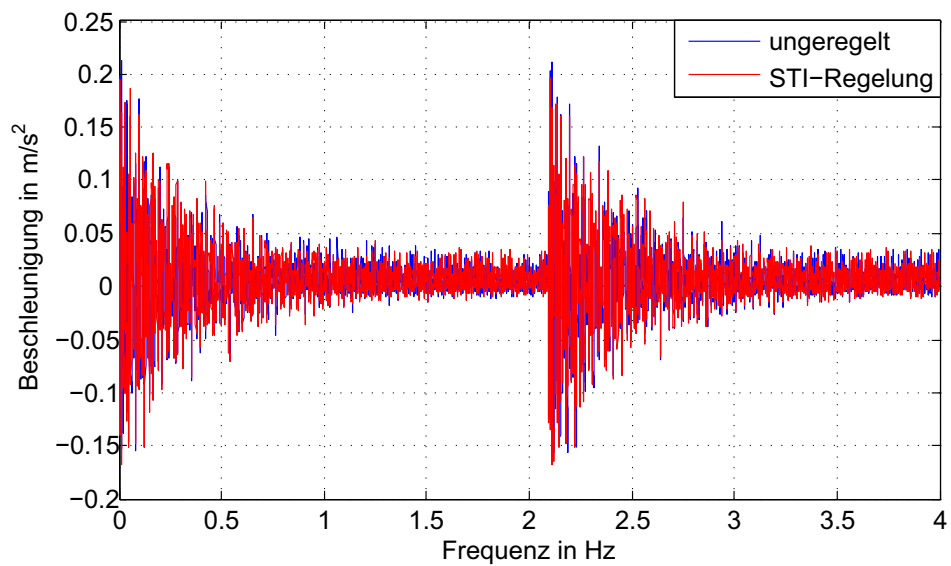


Abbildung A.13: Zeitverlauf der Beschleunigung des geregelten Systems mit STI-Regelung im Sensorpunkt

Das Verhalten der geregelten Systeme im Frequenzbereich ist in den Abbildungen A.14 und A.15 dargestellt. Wie auch im Zeitbereich ist in beiden Abbildungen keine wesentliche Reduktion der Amplituden durch die Regelung feststellbar.

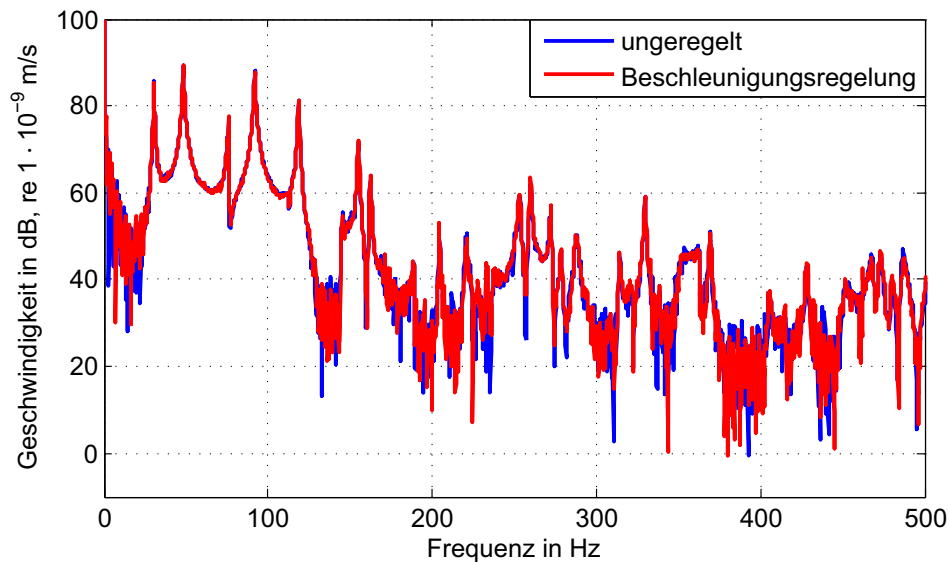


Abbildung A.14: Frequenzbereichsdarstellung der Schwinggeschwindigkeit des geregelten Systems mit Beschleunigungsregelung

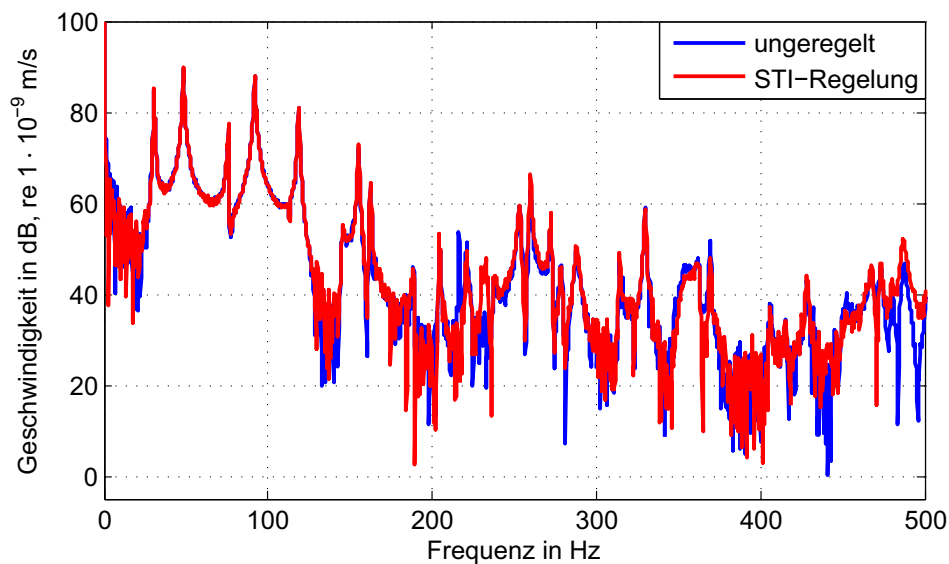


Abbildung A.15: Frequenzbereichsdarstellung der Schwinggeschwindigkeit des geregelten Systems mit STI-Regelung

Die Abbildungen A.16 und A.17 zeigen den Betrag der STI im Sensorpunkt. Vergleicht man beide Abbildungen, ist ein deutlicher Unterschied zwischen der STI-Regelung und der Beschleunigungsregelung zu erkennen. Die Beschleunigungsregelung senkt den Betrag der STI um etwa 100 W/m^2 , wohingegen die STI-Regelung den Betrag der STI um etwa 300 W/m^2 reduzieren kann.

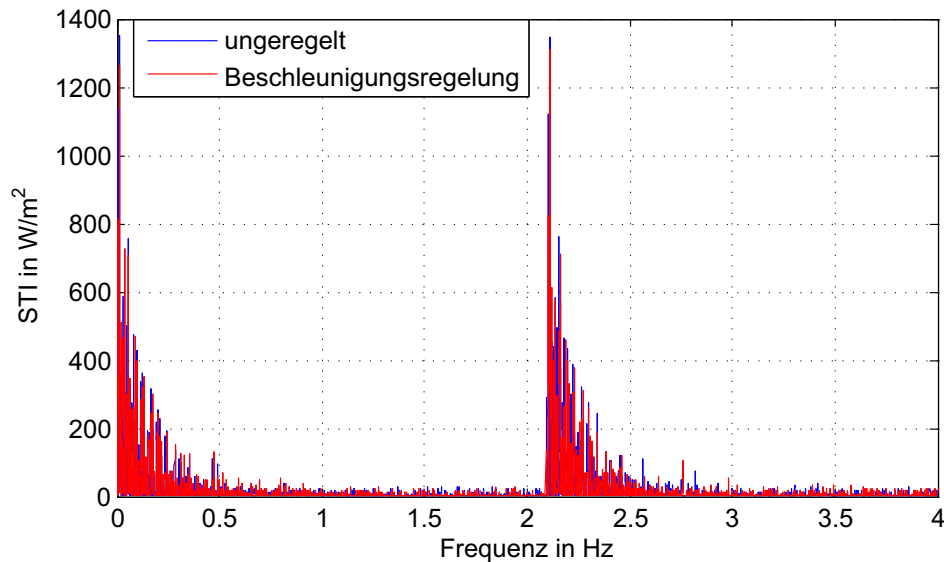


Abbildung A.16: Zeitverlauf der STI des geregelten Systems mit Beschleunigungsregelung im Sensorpunkt

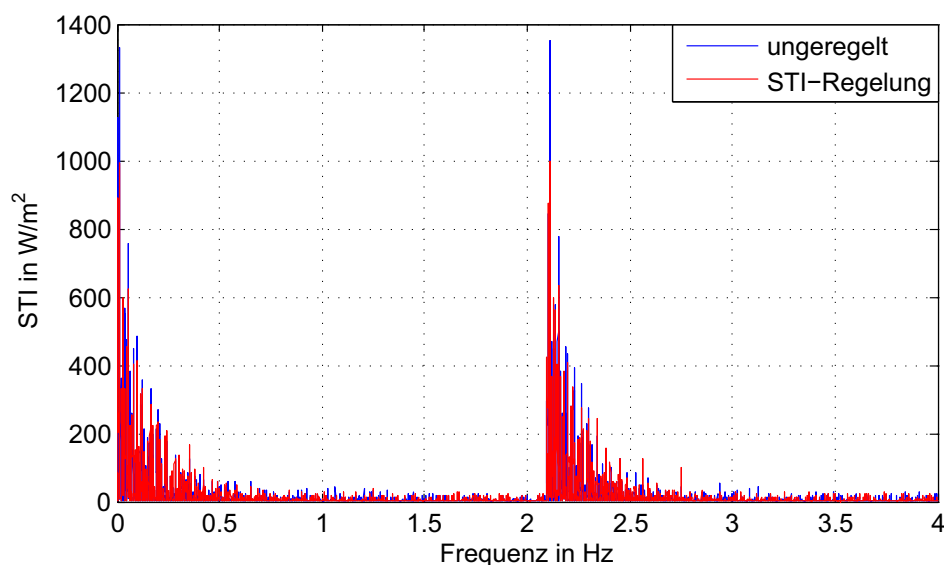


Abbildung A.17: Zeitverlauf der STI des geregelten Systems mit STI-Regelung im Sensorpunkt

Obwohl bei Beschleunigung und Schwinggeschwindigkeit weder im Zeitbereich noch im Frequenzbereich wesentliche Unterschiede zwischen den geregelten Systemen festgestellt werden können, ergibt die Betrachtung des Betrages der STI einen signifikanten Unterschied zwischen der STI-Regelung und der Beschleunigungsregelung. Wird der Betrag der STI als Regelgröße gewählt, so kann diese Größe offensichtlich beeinflusst werden, ohne jedoch die Schwinggeschwindigkeit im Sensorpunkt zu reduzieren.

Literaturverzeichnis

- [1] P. Audrain, P. Masson, und A. Berry. Investigation of active structural intensity control in finite beams: Theory and experiment. *Journal of the Acoustical Society of America*, 108(2):612–623, 2000.
- [2] P. Audrain, P. Masson, A. Berry, J. C. Pascal, und B. Gazengel. The use of pvdF strain sensing in active control of structural intensity in beams. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 15(5):319–327, 2004.
- [3] N. S. Bardell, R. S. Langley, und J. M. Dunsdon. On the free in-plane vibration of isotropic rectangular plates. *Journal of Sound and Vibration*, 191:459–467, 1996.
- [4] D. Bartylla. *Influence of Active Systems on Energy Flow and Balance of a Frame-Plate Test Rig*. Diplomarbeit, Systemzuverlässigkeit und Maschinenakustik SzM, TU Darmstadt, 2010.
- [5] A. Belloli und P. Ermanni. Optimum placement of piezoelectric ceramic modules for vibration suppression of highly constrained structures. *Smart Materials and Structures*, 16(5):1662–1671, 2007.
- [6] J. D. Blotter, R. L. West, und S. D. Sommerfeldt. Spatially continuous power flow using a scanning laser doppler vibrometer. *Journal of vibration and acoustics*, 124:476–482, 2002.
- [7] T. E. Carmichael. The vibration of a rectangular plate with edges elastically restrained against rotation. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 12(1):29–42, 1959.
- [8] E. F. Crawley und E. H. Anderson. Detailed models of piezoceramic actuation of beams. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 1:4–25, 1990.
- [9] L. Cremer und M. Heckl. *Structure-borne Sound*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2005.
- [10] M. J. Daley und S. A. Hambric. A method to simulate structural intensity fields in plates and general structures induced by spatially and temporally random excitation fields. *Journal of Vibration and Acoustics*, 131:011006–1– 011006–9, 2009.
- [11] Z. Ding. Natural frequencies of elastically restrained rectangular plates using a set of static beam functions in the Rayleigh-Ritz method. *Computers and Structures*, 57(4):731–735, 1995.
- [12] P. S. R. Diniz. *Adaptive Filtering Algorithms and Practical Implementation*. Springer Science + Business Media, New York, 2008.
- [13] C. Exner, M. Groschl, S. Radel, C. Focke, E. Benes, und G. Pavić. In-plane laser-doppler-velocimeter sensor head for the measurement of surface structural intensity. *Acustica*, 84(6):1055–1065, 1998.
- [14] N. H. Farag und J. Pan. Modal characteristics of in-plane vibration of rectangular plates. *Journal of the Acoustical Society of America*, 105:3295–3310, 1999.

-
- [15] M. I. Frecker. Recent advances in optimization of smart structures and actuators. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 14:207–216, 2003.
- [16] A. Freschi, A. Pereiea, K. Ahmide, J. Freilich, und J. Arrude. Analyzing the total structural intensity in beams using a homodyne laser doppler vibrometer. *Shock and Vibration*, 7(5):299–308, 2000.
- [17] C. R. Fuller, C. H. Hansen, und S. D. Snyder. Active control of sound radiation from a vibrating rectangular panel by sound sources and vibration inputs: An experimental comparison. *Journal of Sound and Vibration*, 145:195–215, 1991.
- [18] L. Gavrić und G. Pavić. A finite element method for computation of the structural intensity by the normal mode approach. *Journal of Sound and Vibration*, 164(1):29–43, 1993.
- [19] Polytec GmbH. *Hardware Manual Polytec Scanning Vibrometer PSV 300*.
- [20] P. Hagedorn. *Vibrations and Waves in Continuous Mechanical Systems*. John Wiley & Sons, Chichester, UK, 2007.
- [21] S. A. Hambric. Power flow and mechanical intensity calculations in structural finite element analysis. *Journal of Vibration and Acoustics*, 112:542–549, 1990.
- [22] S. A. Hambric und P. D. Taylor. Comparison of experimental and finite element structure-borne flexural power measurements for a straight beam. *Journal of Sound and Vibration*, 170(5):595–605, 1994.
- [23] J. B. Han, S. Y. Hong, und J. H. Song. Energy flow model for thin plate considering fluid loading with meanflow. *Journal of Sound and Vibration*, 331:5326–5346, 2012.
- [24] S. Han. *Varianzbasierte Sensitivitätsanalyse als Beitrag zur Bewertung der Zuverlässigkeit adaptiv-struktureller Systemsysteme*. Dissertation, Systemzuverlässigkeit und Maschinenakustik SzM, TU Darmstadt, 2011.
- [25] T. Hering. *Strukturintensitätsanalyse als Werkzeug der Maschinenakustik*. Dissertation, Systemzuverlässigkeit und Maschinenakustik SzM, TU Darmstadt, 2012.
- [26] M. J. W. Jansen. Analysis of variance designs for model output. *Computer Physics Communications*, 117(1-2):35 – 43, 1999.
- [27] M. Kögl und E. C. N. Silva. Topology optimization of smart structures: design of piezo-electric plate and shell actuators. *Smart Materials and Structures*, 14(2):387–399, 2005.
- [28] S. Kuhl. *Gezielte Leitung von Körperschall unter Zuhilfenahme der Strukturintensitätsrechnung*. Dissertation, Systemzuverlässigkeit und Maschinenakustik SzM, 2010.
- [29] L. Kurtze, T. Doll, J. Bös, und H. Hanselka. Reduktion von Lärm in Gebäuden durch aktive Abschirmung von Geräuschquellen. *Zeitschrift für Lärmbekämpfung*, 2:55–61, 2006.
- [30] Q. Leclere und B. Laulagnet. Nearfield acoustic holography using a laser vibrometer and a light membrane. *Journal of the Acoustical Society of America*, 126(3):1245–1249, 2009.

-
- [31] H. P. Lee, C. Lu, und X. D. Xu. Power flow paths in stiffened plates. *Journal of Sound and Vibration*, 282:1264–1272, 2005.
- [32] W. L. Li. Vibration analysis of rectangular plates with general elastic boundary supports. *Journal of Sound and Vibration*, 273(3):619–635, 2004.
- [33] Y. Y. Li, L. Cheng, und P. Li. Modeling and vibration control of a plate coupled with piezoelectric material. *Composite Structures*, 62:155–162, 2003.
- [34] B. Liu und Y. F. Xing. Exact solutions for the free in-plane vibrations of rectangular plates. *International Journal of Mechanical Sciences*, 51:246–255, 2009.
- [35] P. Lueg. Process of silencing sound oscillations. *U.S. Patent US 2,043,416.*, 1936.
- [36] *Regelungstechnik 1 - Systemtheoretische Grundlagen, Analyse und Entwurf einschleifiger Regelungen.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2009
- [37] N. K. Mandal. Experimental studies of quasi-longitudinal waves power flow in corrugated plates. *Journal of Sound and Vibration*, 297:227–242, 2006.
- [38] D. Mayer. *Regelung und Identifikation aktiver mechanischer Strukturen mit adaptiven digitalen Filtern.* Dissertation, Systemzuverlässigkeit und Maschinenakustik SzM, TU Darmstadt, 2003.
- [39] J. D. Maynard, E. G. Williams, und Y. Lee. Nearfield acoustic holography: 1. Theory of generalized holography and the development of NAH. *Journal of the Acoustical Society of America*, 78(4):1395–1413, 1985.
- [40] W. Maysenhölder. *Körperschallenergie.* Hirzel, Stuttgart, 1994.
- [41] T. E. McDevitt, G. H. Koopmann, und C. B. Burroughs. Two-channel laser vibrometer techniques for vibrational intensity measurements part 1: flexural intensity. *Journal of Vibration and Acoustics*, 115(4):436–440, 1993.
- [42] T. E. McDevitt, G. H. Koopmann, und C. B. Burroughs. Two-channel laser vibrometer techniques for vibrational intensity measurements part 2: Longitudinal intensity. *Journal of Vibration and Acoustics*, 116(1):100–104, 1994.
- [43] P. Meudt. *Strukturintensitätsanalyse in der Maschinenakustik.* Dissertation, Maschinenelemente und Maschinenakustik, TU Darmstadt, 1998.
- [44] R. S. Ming. The estimate and measurement of longitudinal wave intensity. *Acta Mechanica Sinica*, 12(3):251–262, 1996.
- [45] R. Morikawa, S. Ueha, und K. Nakamura. Error evaluation of the structural intensity measured with a scanning laser doppler vibrometer and a k-space signal processing. *Journal of the Acoustical Society of America*, 99(5):2913–2921, 1996.
- [46] A. Mukherjee und S. Joshi. Piezoelectric sensor and actuator design for shape control of piezola-minated plates. *AIAA Journal*, 40(6):1204–1210, 2002.

-
- [47] A. Nejade und R. Singh. Flexural intensity measurement on finite plates using modal spectrum ideal filtering. *Journal of Sound and Vibration*, 256(1):33–63, 2002.
- [48] D. U. Noiseux. Measurement of power flow in uniform beams and plates. *Journal of the Acoustical Society of America*, 47(1):238–247, 1970.
- [49] D. H. Park, S. Y. Hong, H. G. Kil, und J. J. Jeon. Power flow models and analysis of in-plane waves in finite coupled thin plates. *Journal of Sound and Vibration*, 244(4):651–668, 2001.
- [50] J. C. Pascal, X. Carniel, und J.F. Li. Characterisation of a dissipative assembly using structural intensity measurements and energy conservation equation. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 20:1300–1311, 2006.
- [51] J. C. Pascal, T. Loyau, und X. Carniel. Complete determination of structural intensity in plates using laser vibrometers. *Journal of Sound and Vibration*, 161(3):527–531, 1993.
- [52] G. Pavić. Measurement of structure borne wave intensity, part I: Formulation of the methods. *Journal of Sound and Vibration*, 49(2):221–230, 1976.
- [53] G. Pavić. Structural surface intensity: An alternative approach in vibration analysis and diagnosis. *Journal of Sound and Vibration*, 115(3):405–422, 1987.
- [54] G. Pavić. The role of damping on energy and power in vibrating systems. *Journal of Sound and Vibration*, 281:45–71, 2005.
- [55] G. Pavić. Vibration damping, energy and energy flow in rods and beams: Governing formulae and semi-infinite systems. *Journal of Sound and Vibration*, 291:932–962, 2006.
- [56] A. Preumont. *Vibration control of active structures - an introduction*. Kluwer Academic Press, Dordrecht, Boston, London, 2002.
- [57] N. Redman-White. Experiments on the active control of flexural wave power flow. *Journal of Sound and Vibration*, 112(1):187–191, 1987.
- [58] A. Saltelli. Making best use of model evaluations to compute sensitivity indices. *Computer Physics Communications*, 145(2):280–297, 2002.
- [59] A. Saltelli, P. Annoni, I. Azzini, F. Campolongo, M. Ratto, und S. Tarantola. Variance based sensitivity analysis of model output. design and estimator for the total sensitivity index. *Computer Physics Communications*, 181(2):259–270, 2010.
- [60] A. Saltelli, K. Chan, und E. M. Scott. *Sensitivity Analysis*. John Wiley & Sons, Chichester, UK, 2000.
- [61] A. Saltelli, M. Ratto, T. Andres, F. Campolongo, J. Cariboni, D. Gatelli, M. Saisana, und S. Tarantola. *Global Sensitivity Analysis*. John Wiley & Son, Chichester, UK, 2008.
- [62] A. Saltelli, S. Tarantola, F. Campolongo, und M. Ratto. *Sensitivity Analysis in Practice*. John Wiley & Sons, Chichester, UK, 2004.

-
- [63] M. Schäfer. *Computational Engineering - Introduction to Numerical Methods*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2006.
- [64] H. Schürmann. *Konstruieren mit Faser-Kunststoff-Verbunden*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2007.
- [65] A. E. Schwenk, S. D. Sommerfeldt, und S. I. Hayek. Adaptive control of structural intensity associated with bending waves in a beam. *Journal of the Acoustical Society of America*, 96(5, Part 1):2826–2835, 1994.
- [66] I. M. Sobol'. Sensitivity estimates for nonlinear mathematical models. *Mathematical Modeling and Computational Experiment*, 1(4):407–414, 1993.
- [67] I. M. Sobol'. Theorems and examples on high dimensional model representation. *Reliability Engineering and System Safety*, 79:187–193, 2003.
- [68] B. F. Spencer, M. K. Sain, J .C. Kantor, und C. Montemagno. Probabilistic stability measures for controlled structures subject to real parameter uncertainties. *Smart Materials and Structures*, 1(4):294–305, 1992.
- [69] J. H. Spurk. *Strömungslehre: Einführung in die Theorie der Strömungen*. Springer-Verlag, Berlin, 2010.
- [70] M. Stein. *Ausbreitung von Körperschall in ebenen Strukturen*. Dissertation, Mechatronik und Maschinenakustik, TU Darmstadt, 2005.
- [71] M. Strassberger. *Aktive Schallreduktion durch digitale Zustandsregelungen mit Hilfe piezokeramischer Aktoren*. Dissertation, Institut für Mechanik, Bochum, 1997.
- [72] R. P. Szwerc, C. B. Burroughs, S. A. Hambric, und T. E. McDevitt. Power flow in coupled bending and longitudinal waves in beams. *Journal of the Acoustical Society of America*, 107:3186–3195, 2000.
- [73] N. Tanaka. Vortex structural power flow in a thin plate and the influence on the acoustic field. *Journal of the Acoustical Society of America*, 96(2):1563–1574, 1994.
- [74] N. Tanaka. Vorticity characteristics of the vibrational intensity field in an actively controlled thin plate. *Journal of the Acoustical Society of America*, 99(2):942–953, 1996.
- [75] N. Tanaka. Active control of a distributed-parameter structure using vortex power flow confinement. *Journal of the Acoustical Society of America*, 102(3):1648–1656, 1997.
- [76] N. Tanaka, R. Fukuda, und C. Hansen. Acoustic cluster control of noise radiated from a planar structure. *Journal of the Acoustical Society of America*, 117(6):3686–3694, 2005.
- [77] N. Tanaka und H. Sakano. Cluster power flow control of a distributed-parameter planar structure for generating a vibration-free zon. *Smart Materials and Structures*, 16:47–56, 2007.

-
- [78] N. Tanaka und S. D. Snyder. Cluster control of a distributed-parameter planar structure-middle authority control. *Journal of the Acoustical Society of America*, 112(6):2798–2807, 2002.
- [79] K. Vergote, D. Vandepitte, and W. Desmet. Application of the wave-based method for the calculation of structural intensity and power flow in plates. In *Proceedings of ISMA, Leuven, Belgien*, 2008.
- [80] J. W. Verheij. Cross spectral density methods for measuring structure borne power flow on beams and pipes. *Journal of Sound and Vibration*, 70(1):133–139, 1980.
- [81] O. Volkerson. Die Nietkraftverteilung in zugbeanspruchten Nietverbindungen mit konstanten Laschenquerschnitten. *Luftfahrtforschung*, 1:41–47, 1938.
- [82] O. Volkerson. Die Schubkraftverteilung in Leim- Niet- und Bolzenverbindungen. *Energie und Technik*, 5:54–68, 1953.
- [83] G. B. Warburton und S. L. Edney. Vibrations of rectangular plates with elastically restrained edges. *Journal of Sound and Vibration*, 95(4):537–552, 1984.
- [84] E. G. Williams, H. D. Dardy, und R. G. Fink. Nearfield acoustical holography using an underwater, automated scanner. *Journal of the Acoustical Society of America*, 78(2):789–798, 1985.
- [85] E. G. Williams, H. D. Dardy, und R. G. Fink. A technique for measurement of structure-borne intensity in plates. *Journal of the Acoustical Society of America*, 78(6):2061–2068, 1985.
- [86] E. G. Williams und J. D. Maynard. Holographic imaging without the wavelength resolution limit. *Physical Review Letters*, 45(7):554–557, 1980.
- [87] Y. Yang und L. Zhang. Optimal excitation of a rectangular plate resting on an elastic foundation by piezoelectric actuator. *Smart Materials and Structures*, 15:1063–1078, 2006.
- [88] Y. Zhang und J. A. Mann. Measuring the structural intensity and force distribution in plates. *Journal of the Acoustical Society of America*, 99(1):345–353, 1996.